UNIVERSITEIT GENT

Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Toegepaste Wiskunde en Informatica
Voorzitter: Prof. Dr. W. Govaerts

Redeneren over kennis

met vaagmodale epistemische logica

door

Sofie De Clercq

Begeleidster: Marjon Blondeel
Promotor: Prof. Dr. Martine De Cock

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad van Master in de Wiskunde, afstudeerrichting Toegepaste Wiskunde

Academiejaar 2011-2012

Inhoudsopgave

Voorwoord

Al sinds de eerste les *vaagheid- en onzekerheidsmodellen* van professor Kerre was mijn interesse gewekt voor alles wat met vaagheid te maken heeft. Ik hoefde dan ook niet lang te twijfelen in welk vakgebied ik een bachelorproject wou maken. Dat was niet anders toen ik twee jaar later een keuze moest maken voor mijn masterproef. Professor De Cock voorzag een waaier aan mogelijke onderwerpen in het vage vakgebied en na heel wat wikken en wegen was de keuze gemaakt: redeneren over kennis.

Ik zou dit voorwoord graag aanwenden om iedereen te bedanken die heeft meegeholpen met het tot stand komen van deze masterproef. In de eerste plaats is dit natuurlijk mijn promotor, Martine. Van bij het kiezen van een onderwerp tot het voltooien van dit werk was ze een grote steun, zowel inhoudelijk als mentaal. Zo wist ze telkens wijze raad en scherpzinnige tips te geven op cruciale momenten. Ze volgde mij van nabij op om te zorgen dat alles in goed banen liep en tegelijk liet ze de ruimte om voor een persoonlijke inbreng te zorgen. De ervaring die ik dankzij haar heb opgedaan, is voor mij van grote waarde. Maar voornamelijk ben ik haar erg dankbaar voor het vertrouwen dat ze in mij gesteld heeft.

Een grote steun was ook mijn begeleidster, Marjon. Zij heeft erg veel tijd en toewijding aan haar taak als mijn begeleidster besteed en daar ben ik haar enorm dankbaar voor. Haar ervaring, deskundig advies en visie zijn dit werk zonder twijfel ten goede gekomen. Ik ben heel blij dat Marjon mij als begeleidster werd toegewezen en heb oprecht ingezeten met mijn medestudenten die het zonder begeleider moesten stellen.

Een speciaal woord van dank gaat ook uit naar Bart Van Gasse. Midden in de drukte was hij bereid tijd te maken om te antwoorden op enkele prangende vragen. Dankzij zijn raad was het mogelijk om tijd en werklast beter in te schatten en hopelijk komt zijn raadgeving omtrent methodiek later nog van pas (we kwamen namelijk tot de interessante vaststelling dat er onvoldoende tijd was om alles te verwezenlijken wat we in gedachten hadden).

Graag wil ik ook mijn dank uiten tegenover mijn ouders, die mij steeds vrij lieten in mijn keuzes en mij ook alle kansen gegeven hebben. Zonder hen zou ik vandaag niet staan waar ik sta of zijn wie ik ben.

Eveneens van onschatbare waarde is de steun van mijn vriend Bart.

Ook mijn medestudenten wil ik hier graag bedanken, voor de steun en vriendschap, het begrip en de gezelligheid waar ik de afgelopen vijf jaar heb mogen van genieten, ook al droegen zij misschien niet rechtstreeks bij tot dit werk. Bedankt, Hannah, Britt, Elien, Dorien, Lotte en alle anderen!

Toelating tot bruikleen

De auteur geeft de toelating deze masterproef voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de masterproef te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze masterproef.

Hoofdstuk 1

Inleiding

Hoewel ieder van ons dagelijks kennis vergaart, deelt, verspreidt of verwerkt, staan de meesten van ons allicht zelden stil bij kennis op zich. Filosofen vormen hierin natuurlijk een uitzondering; zo ging Plato reeds in de vierde eeuw voor Christus op zoek naar een definitie voor het begrip *kennis* in zijn werk *Theaetetus* [33]. We willen in dit werk echter niet filosofisch maar wel logisch redeneren over kennis. Meer bepaald is het modelleren van kennis ons doel en dit trachten we te bereiken m.b.v. vaagmodale epistemische logica. Dit klinkt allicht ingewikkelder dan het is. *Logica* verwijst uiteraard naar het feit dat we logisch willen redeneren, a.d.h.v. een bepaalde logica. *Epistemologie* is een term van Griekse oorsprong voor kennisleer. Het begrip *vaagmodaal* wijst enerzijds op vaagheid en anderzijds op modaliteit. Uitdrukken dat "iets geweten is" of "behoort tot iemands kennis" is een modaliteit. Overigens zullen we niet scherp maar vaag werken. Concreet betekent dit dat we de zaken niet zwart-wit zullen bekijken, maar tevens tussenliggende grijswaarden als mogelijkheid beschouwen. Zo kan men bijvoorbeeld spreken van vage waarheidswaarden om aan te geven dat iets niet noodzakelijk waar of niet waar moet zijn, maar ook een beetje waar of bijna waar kan zijn. Dit is een evidente keuze omdat vage waarden veel sterker aanleunen bij de realiteit en - ondanks de naamgeving - informatiever zijn dan scherpe waarden. Als iemand vraagt of het regent, dan zullen de meesten geneigd zijn de mate waarin het regent te vermelden (een beetje of heel veel) omdat de persoon in kwestie daar meer aan heeft dan aan een simpele ja of nee.

Sterk gerelateerd aan kennis zijn de begrippen zekerheid en onzekerheid. Psychologen zijn het er al lang over eens dat het in de menselijke aard ligt om zekerheden na te streven en kennis is altijd al een gegeerd goed geweest. Wie even de tijd neemt om er over na te denken, zal echter tot de conclusie komen dat we vaker geconfronteerd worden met onzekerheid dan met zekerheid. In een poging om met deze onzekerheid om te gaan, kunnen we gebruik maken van modellen om onze onzekerheid in kaart te brengen en zo te achterhalen wat we wel kunnen weten en in welke mate. We vergaren bij wijze van spreken kennis over ons gebrek aan kennis. Een schamele troost, kan u misschien denken, maar het modelleren van kennis heeft onder andere toepassingen in de economie, talen, artificiële intelligentie en computerwetenschappen [12]. Hoewel het op het eerste zicht misschien overkomt als een absurd idee, ontsprongen uit het brein van één of andere doodverveelde wiskundige, blijkt het wel degelijk nuttig te zijn.

Er zijn verschillende wijzen om kennis te modelleren, maar de benadering die in dit werk zal gebruikt worden, is behoorlijk populair en gebaseerd op het idee van *mogelijke* *werelden*. Als ik bijvoorbeeld niet weet of er nog melk in mijn koelkast zit, zijn er vanuit mijn perspectief dus twee mogelijke werelden: één waarin er melk staat in mijn koelkast en één waarin er geen staat. Er kan uiteraard maar één *ware wereld* zijn: als ik mijn koelkast open, zal ik het antwoord kennen en zal de realiteit overeenkomen met slechts één van de twee mogelijke werelden.

Het doel van dit werk is het onderzoeken en uitbreiden van een specifiek model, nl. het Kripke model. Dit model is gebaseerd op het concept van mogelijke werelden en o.a. bedoeld om te redeneren over kennis. In het tweede hoofdstuk spitsen we ons toe op het scherp Kripke model, genaamd naar Saul Kripke, die eind jaren '50 en begin jaren '60 de Kripke semantieken introduceerde [17]. Waar Kripke modellen het semantische aspect voor hun rekening nemen, wordt de syntactische kant ingevuld door modale logica's. Aangezien we graag kennis zouden modelleren, spreken we meer specifiek van modale epistemische logica. Dit wordt eveneens besproken in het tweede hoofdstuk. We zullen daar ook het verband tussen axiomasystemen en klassen van Kripke modellen uitleggen, waarbij enkele bekende axiomasystemen zoals **S5** de revue passeren. Kernbegrippen hierbij zijn *correctheid* en *volledigheid*. Verder tonen we aan welke de nodige en voldoende voorwaarden zijn opdat bepaalde axioma's zouden gelden in bepaalde Kripke modellen. Dit wensen we te vergelijken met analoge resultaten uit het vijfde hoofdstuk, waar we axioma's in vage Kripke modellen onderzoeken.

Hoewel vaagheid of *fuzziness* een jong onderzoeksdomein is, werd er op zo'n halve eeuw tijd al enorm verdergebouwd op de fundamenten die Zadeh in de jaren '60 legde. Om de overgang naar vage Kripke modellen te kunnen maken, gebruiken we een scala aan basisbegrippen en geassocieerde eigenschappen i.v.m. vaagverzamelingen, vaaglogica en ordestructuren, zoals bijvoorbeeld triangulaire normen en tralies. Deze begrippen worden gebundeld in het derde hoofdstuk. Verder vermelden we, met het oog op het vierde en vijfde hoofdstuk, eveneens enkele specifiekere definities en eigenschappen, zoals bijvoorbeeld Archimedisch triangulaire normen en **BL**-algebra's.

Naar analogie met het tweede hoofstuk en m.b.v. het derde hoofdstuk komen we in het vierde hoofstuk tot de kern van de zaak: vaagmodale epistemische logica's en vage Kripke modellen. We beginnen met een overzicht van allerlei soorten vage Kripke modellen uit de literatuur. Er is namelijk zelden een eenduidige manier om scherpe zaken te vervagen, zeker als er, zoals bij Kripke modellen, meerdere aspecten zijn die vervaagd kunnen worden. In dit werk zullen we de definities van Radzikowska en Kerre [14] overnemen. Net zoals in het tweede hoofdstuk behandelen we eerst de syntactische kant van de zaak, die nu wordt ingenomen door vaagmodale epistemische logica's. Daarna schakelen we over naar het semantische aspect a.d.h.v. vage Kripke modellen. Typisch wordt het vage Kripke model uit het vierde hoofdstuk wat ingewikkelder dan het scherpe uit het tweede hoofdstuk. Het voordeel is natuurlijk dat er dan meer over te zeggen valt, bijvoorbeeld over de manier waarop logische connectoren geïnterpreteerd worden in de modellen. De begrippen uit het derde hoofdstuk zijn hierbij onontbeerlijk. We kunnen reeds wijzen op enkele verschillen tussen de scherpe en de vage Kripke modellen of tussen verschillende soorten vage Kripke modellen onderling. Ten slotte illustreren we de vage Kripke modellen (zoals we ze in dit werk invoeren) met een voorbeeld gesitueerd in de medische diagnostiek.

Aangezien vervagingen praktisch altijd uitbreidingen zijn van de klassieke equivalenten, kunnen we in het vijfde hoofdstuk nagaan welke axioma's uit het tweede hoofdstuk nog overeind blijven in de vage theorie en of de nodige en voldoende voorwaarden nog steeds dezelfde zijn. We zullen ook bijkomende axioma's onderzoeken, waar nog geen sprake van was in het klassieke geval. Deze resultaten kunnen zinvol zijn bij het zoeken van een axiomasysteem dat correct en volledig is t.o.v. een bepaalde klasse vage Kripke modellen, naar analogie met het tweede hoofdstuk. Het op punt zetten van een dergelijk axiomasysteem vergt diepgaand onderzoek dat buiten het bestek van deze masterproef valt; desalniettemin onderzoeken we in het vijfde hoofdstuk (de haalbaarheid van) enkele mogelijke pistes die tot zo'n resultaat zouden kunnen leiden. De eerste piste is het uitbreiden van een bestaand axiomasysteem (vage **S5**) en corresponderende klasse vage Kripke modellen [10]. Een andere piste bestaat erin Mironovs bewijsmethode voor volledigheid [19] aan te passen. Tenslotte vermelden we ook andere opties, zoals het gebruik van filters en congruentierelaties of Hájeks bewijsmethode bij vage predicatenlogica [10].

Hoofdstuk 2

Modale epistemische logica

2.1 Modale logica

Om kennis te modelleren, kunnen we gebruik maken van een modale taal [22]. Dit is een taal die modaliteiten bevat, zoals bijvoorbeeld *het is mogelijk dat*, *het is noodzakelijk dat*, *het wordt geloofd dat*, *het is geweten dat*, *in de toekomst zal* etc. We willen hiermee concepten als mogelijkheid, noodzakelijkheid, geloof, kennis, tijd en dergelijke kunnen uitdrukken.

We definiëren daartoe een modaal similariteitstype als een verzameling τ van modaliteiten $\alpha \in \tau$, vergezeld van een niet-ledige, aftelbare verzameling A van propositionele variabelen of atomische proposities. We noteren de modale taal geassocieerd met τ en A als $L_{\tau,A}$, wat we afkorten tot L_A indien τ vast is of duidelijk uit de context. Elke $\alpha \in \tau$ labelt een modale boxoperator $[\alpha]$, waarbij de naam refereert naar de notatie in de vorm van een doos. Als τ een singleton is, spreken we van een monomodaal similariteitstype en noteren we de unieke modale boxoperator als $\Box$. Zo niet is het similariteitstype polymodaal. De verzameling van logische connectoren is $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, die respectievelijk corresponderen met de negatie, conjunctie, disjunctie, implicatie en equivalentie. De formules van deze modale taal L_A kunnen dan recursief gedefinieerd worden:

- De logische constanten $\bar{0}$ en $\bar{1}$ zijn formules in L_A.
- De atomische proposities $p \in A$ zijn formules in L_A.
- Als φ, ψ formules zijn in L_A dan zijn $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ en $\varphi \leftrightarrow \psi$ formules in L_A.
- Als φ een formule is in L_A dan is $[\alpha]\varphi$ een formule in L_A, $\forall \alpha \in \tau$.

Een formule die geen atomische propositie bevat, noemen we een constante formule. Met elke boxoperator $\alpha \in \tau$ kunnen we een diamantoperator duaal aan $[\alpha]$ associëren, genoteerd en gedefinieerd als $\langle\alpha\rangle\,\varphi := \neg[\alpha]\neg\varphi$. In geval van τ een singleton noteren we de duale operator van $\Box$ simpelweg als $\Diamond$. Als bijvoorbeeld $\Box$ noodzakelijkheid modelleert, modelleert $\Diamond$ mogelijkheid. Stel bijvoorbeeld dat φ staat voor *het gaat morgen regenen* dan wordt $\Diamond\varphi$ geïnterpreteerd als *het is mogelijk dat het morgen gaat regenen* en dit is duidelijk equivalent met *het gaat niet noodzakelijk droog blijven morgen* of dus $\neg\Box\neg\varphi$. Een functie π die elke atomische propositie afbeeldt op 0 of 1 is een waarheidsfunctie op of interpretatie van A. Voor $p \in A$ zeggen we dat p waar is als $\pi(p) = 1$ en vals als $\pi(p) = 0$. De logische constante $\bar{1}$ is altijd waar (m.a.w. voor elke waarheidsfunctie π geldt $\pi(\bar{1}) = 1$) en de logische constante $\bar{0}$ is altijd vals. Een waarheidsfunctie op A kan recursief uitgebreid worden naar L_A op volgende wijze, met φ en $\psi \in L_A$:

- $\pi(\neg\varphi) = 1 \Leftrightarrow \pi(\varphi) = 0$,
- $\pi(\varphi \wedge \psi) = 1 \Leftrightarrow \pi(\varphi) = 1$ en $\pi(\psi) = 1$,
- $\pi(\varphi \vee \psi) = 1 \Leftrightarrow \pi(\varphi) = 1$ of $\pi(\psi) = 1$,
- $\pi(\varphi \to \psi) = 1 \Leftrightarrow$ als $\pi(\varphi) = 1$ dan $\pi(\psi) = 1$,
- $\pi(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \Leftrightarrow \pi(\varphi \to \psi) = 1$ en $\pi(\psi \to \varphi) = 1$.

Merk hierbij op dat de waarheidswaarde van een formule van de vorm $[\alpha]\varphi$ momenteel nog niet bepaald kan worden aangezien we dit nog niet gedefinieerd hebben. Daarvoor zullen we gebruik maken van een modelstructuur, wat in de volgende sectie verduidelijkt zal worden. Om deze reden beschouwt men de formules van de vorm $[\alpha]\varphi$ soms als atomische proposities, m.a.w. $A' := A \cup \{[\alpha]\varphi | \alpha \in \tau, \varphi \in L_A\}$, opdat bovenstaande definitie van de uitgebreide waarheidsfunctie zinvol zou zijn.

De logische connectoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$ en $\leftrightarrow$ kunnen uitgedrukt worden m.b.v. de logische connector $\to$ en de logische constante $\bar{0}$. Aan de hand van waarheidstabellen kan men vlug nagaan dat de laatste 2 vermelde formules in onderstaande tabellen equivalent zijn in die zin dat ze voor elke mogelijke interpretatie dezelfde waarheidwaarde hebben.

φ	$\bar{0}$	$\varphi \to \bar{0}$	$\neg\varphi$
1	0	0	0
0	0	1	1

φ	ψ	$\neg\psi$	$\varphi \to \neg\psi$	$\neg(\varphi \to \neg\psi)$	$\varphi \wedge \psi$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$(\varphi \to \psi) \to \psi$	$\varphi \vee \psi$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\psi \to \varphi$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Ook de logische constante $\bar{1}$ kan gedefinieerd kan worden a.d.h.v. $\bar{0}$ en $\to$, zoals onderstaande tabel verifieert.

$\bar{0}$	$\bar{0} \to \bar{0}$	$\bar{1}$
0	1	1
0	1	1

Vertrekkende van de logische connector $\to$ en de logische constante $\bar{0}$ kunnen we dus de logische constante $\bar{1}$ en de logische connectoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$ en $\leftrightarrow$ definiëren, met φ, $\psi \in L_A$:

$$\begin{aligned} \bar{1} &\equiv \bar{0} \to \bar{0} \\ \neg\varphi &\equiv \varphi \to \bar{0} \\ \varphi \wedge \psi &\equiv \neg(\varphi \to \neg\psi) \\ \varphi \vee \psi &\equiv (\varphi \to \psi) \to \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \end{aligned}$$

2.2 Modale epistemische logica

2.2.1 Kennis

Indien men kennis wenst te modelleren met behulp van modale logica, spreken we van epistemische logica, aangezien het woord *epistemologie* exact de studie van kennis betekent.

Monomodaliteit wordt vaak aangewend bij het modelleren van kennis aangezien we enkel behoefte hebben aan een operator die de notie kennis vertaalt. Zo'n modale (box)operator kan bijvoorbeeld genoteerd worden als K (van **k**ennis of **k**nowledge). Voor een formule $\varphi \in L_A$ kunnen we $K\varphi$ dan interpreteren als φ *is gekend of geweten*. De duale (diamant)operator van K (genoteerd $\bar{K}$) is gedefinieerd als $\bar{K}\varphi := \neg K \neg\varphi$, met als betekenis *de negatie van* φ *is niet gekend*.

Opmerking 2.2.1
In deze sectie modelleren we de kennis van één persoon, waarnaar meestal verwezen wordt met het begrip *agent*. Dit is uitbreidbaar naar meerdere agenten, ook gekend onder de naam *multi-agenten systeem*. In dat geval werken we niet monomodaal, want elke agent beschikt dan over zijn eigen kennisoperator. Als ons systeem bijvoorbeeld bestaat uit n agenten ($n \in \mathbb{N}$), noteren we K_i als de kennisoperator die correspondeert met agent i (met $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). In dit geval wordt $K_i\varphi$ geïnterpreteerd als *agent* i *weet* φ voor een formule $\varphi \in L_A$. □

We introduceren nu een Kripke model [18], een welbekend model dat steunt op het idee van mogelijke werelden en dat zich goed leent tot het modelleren van kennis, zoals ook uit volgende definities en voorbeelden zal blijken.

Definitie 2.2.1 (Kripke model)
Zij A een vaste, niet-ledige, aftelbare verzameling van atomische proposities. Een Kripke model is een structuur M van de vorm $\langle S, \pi, R\rangle$, met

- *S een niet-ledige verzameling (de verzameling van mogelijke werelden),*

- $\pi : S \to (A \to \{0,1\})$ *een functie die elke mogelijke wereld afbeeldt op een waarheidsfunctie, dit is een functie die elk atoom afbeeldt op 0 als het vals is en op 1 als het waar is en*
- $R \subseteq S \times S$ *een toegankelijkheidsrelatie.*

Intuïtief behoort een koppel van mogelijke werelden $(s,t) \in S \times S$ tot de kennistoegankelijkheidsrelatie R indien wereld t als mogelijk beschouwd wordt vanuit wereld s. We noemen t in dat geval een epistemisch alternatief voor s. De waarheidsfunctie π zegt voor elke mogelijke wereld s of een atoom $p \in A$ in die wereld waar is (afgebeeld op 1) of niet (afgebeeld op 0), waarbij A de eerder gedefinieerde niet-ledige, aftelbare verzameling van alle atomische proposities is. Bijkomend nemen we aan dat $\pi(s) \neq \pi(t), \forall s \neq t \in S$. Het zou namelijk niet zinvol zijn om identieke werelden in het model op te nemen. Het doel van zulke modellen is het bekomen van informatie en het toevoegen van een identieke wereld kan geen extra informatie opleveren. Een uitzondering zou zijn dat de relatie tussen de identieke werelden en de andere werelden onderling verschillend zou zijn, maar het zou al helemaal onlogisch zijn om een bepaalde wereld tegelijk wel en niet als mogelijk te beschouwen vanuit een andere. We zullen vanaf nu niet meer expliciet vermelden dat elke formule φ tot de modale taal L_A behoort, maar dit wordt wel verondersteld. De verzameling van alle mogelijke Kripke modellen zullen we voortaan noteren als **M**.

Definitie 2.2.2 (Modellering atomen, negatie, conjunctie, disjunctie, implicatie, equivalentie, kennisoperator)
Een atomische propositie $p \in A$ is waar of geldig in een wereld $s \in S$ van een Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ als haar waarheidswaarde 1 is, genoteerd:

$$(M,s) \models p \Leftrightarrow \pi(s)(p) = 1.$$

We kunnen dit lezen als (M,s) modelleert p. Verder definiëren we voor elke formule $\varphi, \psi \in L_A$

- $(M,s) \models \neg\varphi \Leftrightarrow (M,s) \not\models \varphi$,
- $(M,s) \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (M,s) \models \varphi$ *en* $(M,s) \models \psi$,
- $(M,s) \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow (M,s) \models \varphi$ *of* $(M,s) \models \psi$,
- $(M,s) \models \varphi \to \psi \Leftrightarrow$ *als* $(M,s) \models \varphi$ *dan* $(M,s) \models \psi$,
- $(M,s) \models \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (M,s) \models \varphi \to \psi$ *en* $(M,s) \models \psi \to \varphi$.

We zeggen dat een formule $\varphi \in L_A$ gekend is in een Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ en een wereld $s \in S$ indien deze formule φ waar is in elke wereld toegankelijk vanuit wereld s:

$$(M,s) \models K\varphi \Leftrightarrow \forall t \in S : \text{ als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi.$$

Intuïtief kunnen we dus zeggen dat we weten dat een formule φ waar is in wereld s indien ze waar is in elke wereld die we als mogelijk beschouwen vanuit de wereld s.

Eigenschap 2.2.1 (Modellering duale kennisoperator)
In een Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ geldt voor elke $\varphi \in L_A$ en wereld $s \in S$:

$$(M,s) \models \bar{K}\varphi \Leftrightarrow \exists t \in S : (s,t) \in R \text{ en } (M,t) \models \varphi.$$

Bewijs A.d.h.v. de definities voor de waarheidswaarden van een formule van de vorm $\neg\varphi$ en $K\varphi$ kunnen we de waarheidswaarde van een formule van de vorm $\bar{K}\varphi$ berekenen, m.a.w. nagaan of $(M,s) \models \bar{K}\varphi$ al dan niet geldt in een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$, met $s \in S$:

$$\begin{aligned}(M,s) \models \bar{K}\varphi \Leftrightarrow (M,s) \models \neg K\neg\varphi \Leftrightarrow (M,s) \not\models K\neg\varphi \\ &\Leftrightarrow \neg(\forall t \in S: \text{ als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \neg\varphi) \\ &\Leftrightarrow \exists t \in S : (s,t) \in R \text{ en } (M,t) \not\models \neg\varphi \\ &\Leftrightarrow \exists t \in S : (s,t) \in R \text{ en } (M,t) \models \varphi\end{aligned}$$

Dit is het gestelde. □

Eigenschap 2.2.1 stemt ook overeen met onze intuïtie: we weten niet of een formule φ vals is in een wereld s van zodra er een wereld bestaat die we als mogelijk beschouwen waar φ wel geldt.

Opmerking 2.2.2 (Doodlopende eindes)
In de definitie van $(M,s) \models K\varphi$ sluiten we niet uit dat er geen enkel epistemisch alternatief is voor de wereld s. Segerberg [24] noemt zo'n wereld een *dead end* of een doodlopend einde. De definitie levert dan op dat we weten dat elke formule waar is, dus ook bijvoorbeeld φ en $\neg\varphi$, wat inconsistent is. Deze werelden zijn dus allesbehalve nuttig, wat ook intuïtief duidelijk is: niets wordt als mogelijk beschouwd. Om deze reden zullen we doodlopende eindes uitsluiten. Uit propositie 2.2.5 zal bovendien blijken dat het wenselijk is om ons te beperken tot reflexieve toegankelijkheidsrelaties, waardoor doodlopende eindes automatisch geëlimineerd worden. □

Definitie 2.2.3 (Modellering)
Een formule $\varphi \in L_A$ is waar of geldig in een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ indien ze geldig is in elke wereld $s \in S$ van dat model, genoteerd:

$$M \models \varphi \Leftrightarrow \forall s \in S : (M,s) \models \varphi.$$

Een formule $\varphi \in L_A$ is waar of geldig indien ze geldig is in elk Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ van de klasse **M***, genoteerd:*

$$\models \varphi \Leftrightarrow \forall M \in \mathbf{M} : M \models \varphi.$$

Een formule waarvoor $\models \varphi$ geldt, m.a.w. een formule die waar is in elk model van de klasse **M***, noemen we een* **M***-tautologie of kortweg tautologie [28].*

Om deze concepten te illustreren, geven we een eenvoudig voorbeeld.

Voorbeeld 1
Veronderstel $M = \langle S, \pi, R\rangle$ met:

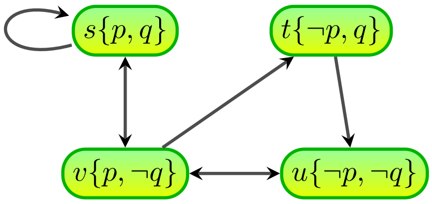
- $A = \{p, q\}$,
- $S = \{s, t, u, v\}$,
-

$\pi(.)(.)$	s	t	u	v
p	1	0	0	1
q	1	1	0	0

,

- $R = \{(s,s),(s,v),(t,u),(u,v),(v,s),(v,t),(v,u)\}$.

Visueel kunnen we deze informatie samenvatten m.b.v. onderstaand schema. Het feit dat (v,t) element is van de toegankelijkheidsrelatie wordt op het schema vertaald als een pijl van wereld v naar wereld t. In accolades wordt weergegeven welke atomische propositities geldig zijn per wereld en welke niet (het laatste is equivalent met het geldig zijn van de negatie van het atoom en wordt ook als dusdanig weergegeven). Als we bijvoorbeeld wereld t bekijken is p niet waar ($\pi(t)(p) = 0$) en q wel ($\pi(t)(q) = 1$) of anders gezegd $\neg p$ en q gelden in wereld t.



We kunnen nu gemakkelijk enkele uitspraken nagaan:

- q is waar in wereld t (i.e. $(M,t) \models q$) aangezien $\pi(t)(q) = 1$,
- p is niet waar in M (i.e. $M \not\models p$) aangezien er een wereld bestaat waarin p niet waar is, nl. t (opgelet: *p is niet waar in M* is niet hetzelfde als *$\neg p$ is waar in M* aangezien de eerste uitspraak waar is en de tweede vals),
- p is gekend in wereld s (i.e. $(M,s) \models Kp$) aangezien p waar is in elke wereld die toegankelijk is vanuit s, p is nl. waar in s en in v,
- $p \wedge \neg q$ is gekend in wereld u (i.e. $(M,u) \models K(p \wedge \neg q)$), aangezien $p \wedge \neg q$ waar is in elke wereld toegankelijk vanuit u, nl. in v.

Concreet kunnen p en q bijvoorbeeld respectievelijk staan voor *het regent* en *de zon schijnt* (dit zijn geen complementaire gebeurtenissen, m.a.w. het één sluit het ander niet uit). De bovenstaande conclusies laten zich dan vertalen in:

- de zon schijnt in wereld t,
- het is niet waar dat het regent, m.a.w. er bestaat minstens 1 wereld waarin het niet regent (opgelet: dit is niet hetzelfde als zeggen dat het waar is dat het niet regent, want dit is een sterkere uitspraak die inhoudt dat het in elke wereld niet regent),
- in wereld s is het geweten dat het regent, of analoog: in elke wereld die als mogelijk wordt beschouwd vanuit s regent het, en
- in wereld u is het geweten dat het regent en de zon niet schijnt. $\square$

Opmerking 2.2.3
In theorie is de grootte van de verzameling S niet gelimiteerd, maar vanzelfsprekend heeft deze wel een invloed op de complexiteit van het model, zij het via de toegankelijkheidsrelatie R. Stel bijvoorbeeld dat we willen nagaan of een bepaalde formule φ gekend is in een bepaalde wereld s. Hiervoor moeten we voor elke wereld t die toegankelijk is vanuit

s nagaan of φ daar waar is. Hoe meer werelden er toegankelijk zijn, hoe meer waarheidswaarden we moeten controleren. Het aantal toegankelijke werelden vanuit 1 wereld wordt gelimiteerd door het aantal elementen van S, $|S|$ genoteerd. Hoe meer koppels er tot de toegankelijkheidsrelatie R behoren, hoe ingewikkelder ons model. Dit aantal koppels is hoogstens $|S|^2$, m.a.w. hoe groter de verzameling S, hoe ingewikkelder de modellen kunnen worden. $\square$

2.2.2 Correctheid en volledigheid

De voorgaande definities leiden onmiddellijk tot de volgende propositie, waarbij nog geen enkele voorwaarde wordt opgelegd aan de toegankelijkheidsrelatie R.

Propositie 2.2.2
Voor alle formules $\varphi, \psi \in L_A$ geldt:

1. $\models K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$,
2. $\models \varphi \Rightarrow \models K\varphi$.

Bewijs Zij φ en ψ 2 willekeurige formules.

1. We bekomen:

$$\begin{array}{ll} & \models K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi) \\ \Leftrightarrow & \langle \text{ definitie modellering } \rangle \\ & \forall M = \langle S, \pi, R\rangle \in \mathbf{M}, \forall s \in S : (M, s) \models K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi) \\ \Leftrightarrow & \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\ & \forall M = \langle S, \pi, R\rangle \in \mathbf{M}, \forall s \in S : \text{als } (M, s) \models K(\varphi \to \psi) \text{ dan } (M, s) \models K\varphi \to K\psi \end{array}$$

Zij daartoe $M = \langle S, \pi, R\rangle$ een willekeurig Kripke model uit de klasse $\mathbf{M}$ en $s \in S$ een arbitraire wereld. Als we aantonen dat vertrekkende van $(M, s) \models K(\varphi \to \psi)$ volgt dat $(M, s) \models K\varphi \to K\psi$ geldt, is het gestelde bewezen. We bekomen:

$$\begin{array}{ll} & (M, s) \models K(\varphi \to \psi) \\ \Leftrightarrow & \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\ & \Leftrightarrow \forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } (M, t) \models \varphi \to \psi \\ \Leftrightarrow & \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\ & \forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan (als } (M, t) \models \varphi \text{ dan } (M, t) \models \psi) \\ \Rightarrow & \langle \text{ logica-calculus: } (P \to (Q \to R)) \Rightarrow ((P \to Q) \to (P \to R)) \rangle \\ & \forall t \in S : \text{als (als } (s, t) \in R \text{ dan } (M, t) \models \varphi) \text{ dan (als } (s, t) \in R \text{ dan } (M, t) \models \psi) \\ \Rightarrow & \langle \text{ logica-calculus: } (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)(P(x)) \to (\forall y)(Q(y))) \rangle \\ & \text{als } (\forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } (M, t) \models \varphi) \\ & \text{dan } (\forall u \in S : \text{als } (s, u) \in R \text{ dan } (M, u) \models \psi) \\ \Leftrightarrow & \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\ & \text{als } (M, s) \models K\varphi \text{ dan } (\forall u \in S)(\text{als } (s, u) \in R \text{ dan } (M, u) \models \psi) \\ \Leftrightarrow & \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\text{als } (M,s) \models K\varphi \text{ dan } (M,s) \models K\psi \\
\Leftrightarrow\quad &\langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
&(M,s) \models K\varphi \to K\psi
\end{aligned}$$

Hiermee is het gestelde bewezen.

2. Laten we veronderstellen dat $\models \varphi$ geldt, i.e.

$$\begin{aligned}
&\forall M = \langle S,\pi,R\rangle \in \mathbf{M}, \forall t \in S : (M,t) \models \varphi \\
\Rightarrow\quad &\langle \text{ in het bijzonder } \rangle \\
&\forall M = \langle S,\pi,R\rangle \in \mathbf{M}, \forall s \in S, \forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi \\
\Leftrightarrow\quad &\langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&\forall M = \langle S,\pi,R\rangle \in \mathbf{M}, \forall s \in S, (M,s) \models K\varphi \\
\Leftrightarrow\quad &\langle \text{ definitie modellering } \rangle \\
&\models K\varphi
\end{aligned}$$

□

Propositie 2.2.2 houdt eigenlijk in dat ons huidig model voor kennis gesloten is onder logische gevolgtrekking en dat alles wat waar is, ook gekend is. Dit is duidelijk enkel een zinvolle representatie als we te maken hebben met zogenaamde *ideale agenten*, die zeker niet gerechtvaardigd zijn om menselijke agenten te vertegenwoordigen. Dit staat in de literatuur bekend als het *probleem van logische alwetendheid* [18, 22]. In de loop der tijd zijn veel mogelijke oplossingen (in de vorm van modelaanpassingen) uit de bus gekomen om dit probleem te omzeilen, zoals bijvoorbeeld Rantale modellen, zeefmodellen en clustermodellen [18]. We zullen hier echter niet dieper op ingaan omdat dit ons veel te ver zou leiden en we in dit werk noch de ruimte noch de tijd zullen hebben om deze aangepaste modellen te vervagen. Merk wel op dat als iemand a.d.h.v. zijn eigen kennis een Kripke model opbouwt om na te gaan welke conclusies hij of zij kan trekken en deze bijvoorbeeld op voorhand weet dat φ geldt, hij of zij geen werelden in het model zal opnemen waarin φ niet geldt. Voor de zaken waarover de persoon twijfelt, m.a.w. die hij of zij niet weet, kunnen werelden opgenomen worden waar deze zaken eens wel en eens niet gelden. Bijgevolg zal hij of zij automatisch weten wat waar is (in de modelbetekenis), precies omdat het model zo werd opgebouwd. We kunnen nu trachten een axiomasysteem te defniëren dat precies de tautologiëen van de klasse Kripke modellen vastlegt. Een axiomasysteem bestaat uit axioma's en afleidingsregels. We voeren eerst nog enkele belangrijke begrippen in.

Definitie 2.2.4 (Stelling van een systeem - bewijsbaarheid [3])
Een stelling van een systeem is een formule die bewezen kan worden uit de axioma's en de afleidingsregels van dat systeem. Formeel betekent dit dat je vertrekkende van (instanties van) de axioma's een rij van geldige formules kan vormen die uit elkaar volgen m.b.v. de afleidingsregels met de eigenschap dat het laatste element van de keten de stelling is.

Wie niet met zulke bewijsmethode vertrouwd is, kan verderop de bewijzen van eigenschap 5.2.1 als voorbeeld beschouwen. Per definitie zijn alle axioma's van een systeem stellingen. Propositie 2.2.2 geeft ons aanleiding om de eerste formule $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$ als axioma te gebruiken aangezien het een tautologie is (zie definitie 2.2.3). De tweede blijkt geschikt te zijn als afleidingsregel. Een afleidingsregel is steeds van de vorm *als α een stelling is, dan is β een stelling* en dit wordt doorgaans genoteerd als $\frac{\alpha}{\beta}$. Merk trouwens op dat de sterkere eigenschap $M \models \varphi \Rightarrow M \models K\varphi, \forall M \in \mathbf{M}$ op analoge wijze kan bewezen worden. We voeren vooreerst nog het begrip substitutieformule in.

Definitie 2.2.5 (Substitutieformule)
Een substitutieformule van een formule φ bekomen we door de atomische proposities die in φ voorkomen, bijvoorbeeld $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, te vervangen door willekeurige formules $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$. Om dit kort te noteren, gebruiken we $\vec{p}$ om te verwijzen naar de atomische proposities $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ in φ en $\vec{\psi}$ voor $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$. We geven met de notatie $\varphi(\vec{p})$ aan dat de formule φ de atomische proposities $\vec{p}$ bevat. De substitutieformule die men bekomt door $\vec{p}$ te substitueren door $\vec{\psi}$ in $\varphi(\vec{p})$ noteren we als $\varphi(\frac{\vec{\psi}}{\vec{p}})$.

Corresponderend met de geldige formules van de geïntroduceerde Kripke modellen definiëren de volgende axioma's een systeem, genaamd systeem **K** [18, 22].

Axiomasysteem 2.2.1 (Systeem **K**)

- een axiomatisatie van propositionele logica op basis van de logische connector $\rightarrow$ en de logische constante $\bar{0}$ [28]:
  - $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$,
  - $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$,
  - $((\varphi \rightarrow \bar{0}) \rightarrow (\psi \rightarrow \bar{0})) \rightarrow ((\psi \rightarrow \bar{0}) \rightarrow \varphi)$,
  - modus ponens: $\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$,
  - substitutieregel: $\forall \vec{\psi} : \frac{\varphi(\vec{p})}{\varphi(\frac{\vec{\psi}}{\vec{p}})}$,
- $K(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K\varphi \rightarrow K\psi)$,
- noodzakelijkheidsregel: $\frac{\varphi}{K\varphi}$.

Het axioma $K(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K\varphi \rightarrow K\psi)$ wordt het *K-axioma* genoemd en houdt in dat kennis gesloten is onder implicatie. Met de notatie van de *noodzakelijkheidsregel* wordt bedoeld dat $K\varphi$ een stelling is indien φ een stelling is (zie definitie 2.2.4). De substitutieregel houdt in dat elke substitutieformule van een stelling φ eveneens een stelling is. Men maakt in principe een onderscheid tussen axioma's en afleidingsregels: modus ponens, de substitutieregel en de noodzakelijkheidsregel zijn afleidingsregels, de andere zijn axioma's. In de literatuur wordt de substitutieregel soms niet vermeld maar wel impliciet aangenomen [18, 22]. In dit werk opteren we om deze regel expliciet te vermelden. Interessante eigenschappen i.v.m. axiomasystemen en bepaalde klassen van Kripke modellen zijn correctheid of betrouwbaarheid en volledigheid.

Definitie 2.2.6 (Correctheid [3])
We zeggen dat een axiomasysteem correct is t.o.v. een klasse modellen indien elke stelling van het axiomasysteem een tautologie is van de klasse modellen.

Definitie 2.2.7 (Volledigheid [3])
We zeggen dat een axiomasysteem volledig is t.o.v. een klasse modellen indien elke tautologie van de klasse modellen een stelling is van het axiomasysteem.

Men kan bewijzen dat het systeem **K** correct en volledig (Engels: sound and complete) is met betrekking tot de klasse van alle Kripke modellen **M**, wat volgens definities 2.2.6

en 2.2.7 betekent dat de verzameling van stellingen in dit systeem precies de verzameling van tautologieën is [1, 3, 29]. We overlopen hoe dit in de literatuur wordt aangetoond.

Correctheid houdt dus in dat elke stelling van **K** geldig is in elk model van de gegeven klasse Kripke modellen **M**. Uit propositie 2.2.2 volgt dat de axioma's die modale operatoren bevatten (voor **K** is dit enkel het K-axioma) in elk model geldig zijn. Hetzelfde werd in de klassieke logica reeds aangetoond voor de andere axioma's die de modale operator niet bevatten. Helaas is het feit dat alle axioma's geldig zijn in elk model op zich niet voldoende om te besluiten dat alle stellingen (die allemaal afgeleid kunnen worden uit de axioma's a.d.h.v. de afleidingsregels) in elk model geldig zijn. We moeten eveneens aantonen dat de afleidingsregels de geldigheid behouden in de beschouwde klasse van modellen [3]. Stel daartoe dat de formule φ geldig is in elk model. Dit wil zeggen dat de formule waarheidswaarde 1 heeft in elke wereld van elk model, onafhankelijk van de waarheidswaarde van de atomische proposities $\vec{p}$ die in φ voorkomen. Bijgevolg zal $\varphi(\frac{\vec{\psi}}{\vec{p}})$ ook nog steeds waarheidswaarde 1 hebben in elk model, m.a.w. de substitutieregel behoudt de geldigheid. Ook modus ponens behoudt de geldigheid van formules wegens de definitie van de modellering van de implicatie (zie definitie 2.2.2). Als de formule φ geldig is in elk model, dan zal wegens propositie 2.2.2(2) ook $K\varphi$ geldig zijn in elk model. Alle afleidingsregels behouden m.a.w. de geldigheid van formules in de klasse Kripke modellen. Hiermee is bewezen dat **K** correct is t.o.v. de klasse Kripke modellen.

Volledigheid is net het omgekeerde van correctheid nl. dat elke formule die geldig is in elk model van de gegeven klasse **M** een stelling is van het gegeven systeem **K**. M.a.w. voor elke formule φ die geen stelling is van **K** moet er een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ bestaan uit de beschouwde klasse waarvoor in een wereld $s \in S$ geldt dat $\pi(s)(\varphi) = 0$. Om de bewijsmethode te verduidelijken, voeren we eerst enkele begrippen in.

Definitie 2.2.8 (**K**-(in)consistentie [3])
*We noemen een formule φ **K**-inconsistent indien de negatie ervan een stelling is van **K**. Zo niet is ze **K**-consistent. Een eindige verzameling formules $\Delta = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ is **K**-consistent als en slechts als $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$ geen stelling is van **K**. Zo niet is ze **K**-inconsistent. Voor een oneindige verzameling formules zeggen we dat ze **K**-consistent is als elke eindige deelverzameling het is.*

Voor volledigheid willen we aantonen dat er voor elke formule φ die geen stelling is van **K** een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ bestaat uit de beschouwde klasse waarvoor in een wereld $s \in S$ geldt dat $\pi(s)(\varphi) = 0$. Aangezien elke formule i.h.b. de negatie is van een formule (φ is hetzelfde als $\neg(\neg\varphi)$ in propositionele logica), kunnen we deze voorwaarde herformuleren als: voor elke formule $\neg\varphi$ die geen stelling is van **K** bestaat er een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ uit de beschouwde klasse waarvoor in een wereld $s \in S$ geldt dat $\pi(s)(\neg\varphi) = 0$. Dit is op zijn beurt equivalent met aantonen dat er voor elke formule $\neg\varphi$ die geen stelling is van **K** een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ bestaat uit de beschouwde klasse waarvoor in een wereld $s \in S$ geldt dat $\pi(s)(\varphi) = 1$. Definitie 2.2.8 in acht genomen is dit equivalent met de voorwaarde dat voor elke **K**-consistente formule φ geldt dat er een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ bestaat uit de beschouwde klasse waarvoor in een wereld $s \in S$ geldt dat $\pi(s)(\varphi) = 1$ [3]. Voor elke **K**-consistente formule φ is het singleton $\{\varphi\}$ een **K**-consistente verzameling (dit volgt eveneens uit definitie 2.2.8). Bijgevolg kan de volledigheid ook bewezen worden door een sterkere voorwaarde aan te tonen, nl. dat er voor elke **K**-consistente verzameling Δ een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ bestaat uit de beschouwde klasse waarvoor in een wereld $s \in S$ geldt dat $\pi(s)(\varphi) = 1$, $\forall\varphi \in \Delta$. Om dit te bewijzen, wordt eveneens het begrip *maximaliteit* gebruikt.

Definitie 2.2.9 (Maximaliteit [3])
We noemen een verzameling formules Γ maximaal als en slechts als voor elke formule geldt dat ze zelf in de verzameling zit of dat haar negatie erin zit. Als een verzameling zowel maximaal als **K***-consistent is, noemen we ze logischerwijze maximaal* **K***-consistent.*

Men kan onderstaande propositie m.b.t. **K**-consistente verzamelingen bewezen worden [3].

Propositie 2.2.3 (Maximale **K**-consistente uitbreiding [3])
Voor elke **K***-consistente verzameling Δ bestaat er een maximale* **K***-consistente verzameling Γ zodanig dat $\Delta \subseteq \Gamma$, genaamd een maximale* **K***-consistente uitbreiding van Δ.*

De sleutel tot de volledigheid is het canonisch model van **K**, dat gedefinieerd wordt a.d.h.v. bovenstaande begrippen (maximale **K**-consistente verzameling formules).

Definitie 2.2.10 (Canonisch model van **K** [3])
Het canonisch model van **K** *zullen we noteren als $M_{\mathbf{K}} = \langle S, \pi, R \rangle$ met*

- $S = \{s | s \text{ is een maximale } \mathbf{K}\text{-consistente verzameling formules}\}$,
- *voor elke atomische propositie p is $\pi(s)(p) = 1$ als $p \in s$, anders $\pi(s)(p) = 0$ en*
- $(s, t) \in R \Leftrightarrow$ *elke formule φ waarvoor $K\varphi$ een element is van s, zit in t.*

Men kan dan volgende stelling bewijzen, waar vaak naar verwezen wordt als de fundamentele stelling van het canonisch model [3], omdat het precies deze eigenschap van het canonisch model is wat maakt dat volledigheid eruit volgt.

Stelling 2.2.4 (Fundamentele stelling van het canonisch model [3])
Als $M_{\mathbf{K}} = \langle S, \pi, R \rangle$ het canonisch model is van **K***, dan is $\pi(s)(\varphi) = 1$ als $\varphi \in s$ en $\pi(s)(\varphi) = 0$ als $\varphi \notin s$ voor elke formule φ en elke wereld $s \in S$.*

Een gevolg is dat voor elke maximale **K**-consistente verzameling Γ een Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ bestaat uit de beschouwde klasse waarvoor in een wereld $s \in S$ geldt dat $\pi(s)(\varphi) = 1$, $\forall \varphi \in \Gamma$, nl. het canonisch model $M_{\mathbf{K}}$. Wegens propositie 2.2.3 is elke **K**-consistente verzameling Δ bevat in zo'n Γ en dus geldt ook voor elke **K**-consistente verzameling Δ dat er een Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ bestaat uit de beschouwde klasse waarvoor in een wereld $s \in S$ geldt dat $\pi(s)(\varphi) = 1$, $\forall \varphi \in \Gamma$, nl. het canonisch model $M_{\mathbf{K}}$. We hadden reeds beredeneeerd dat hieruit de volledigheid van **K** volgt.

Als er zowel sprake is van correctheid als van volledigheid zeggen we dat de beschouwde klasse modellen het axiomasysteem determineert [1, 3]. De beschouwde klasse Kripke modellen **M** determineert het systeem **K**.

2.2.3 Het systeem T

Tot nu toe zijn er geen specifieke eisen opgelegd aan de toegankelijkheidsrelatie R. Maar zoals hieronder zal blijken, kunnen enkele intuïtieve eigenschappen van kennis in het model geïncorporeerd worden door bepaalde voorwaarden op te leggen aan R [18].

Een eerste intuïtief wenselijke eigenschap van kennis is dat ze waar is. Als je iets *weet*, dan moet het wel waar zijn, m.a.w. $K\varphi \rightarrow \varphi$ zou moeten gelden. Dit is echter niet gegarandeerd in ons huidig model, zoals een simpel voorbeeld aantoont.

Voorbeeld 2
Veronderstel $M = \langle S, \pi, R \rangle$ met:

- $A = \{p\}$,
- $S = \{s, t\}$,
-

$\pi(.)(.)$	s	t
p	0	1

,

- $R = \{(s, t)\}$.

Dit levert volgend schema op.

$$s\{\neg p\} \longrightarrow t\{p\}$$

Aangezien t de enige wereld is die toegankelijk is vanuit s en p waar is in t, geldt $(M, s) \models Kp$. p is echter niet waar in s dus $(M, s) \models p$ geldt niet. Per definitie van de modellering van de implicatie bekomen we $(M, s) \not\models Kp \to p$. $\square$

Door de klasse van Kripke modellen te beperken tot deze met een reflexieve toegankelijkheidsrelatie ($\forall s \in S : (s, s) \in R$) lossen we dit probleem op, zoals de volgende propositie bewijst.

Propositie 2.2.5 (Voldoende voorwaarde ware kennis [18])
In een Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ met een reflexieve toegankelijkheidsrelatie R geldt:

$$M \models K\varphi \to \varphi, \forall \varphi \in L_A.$$

Bewijs Veronderstel dat $M = \langle S, \pi, R \rangle$ een Kripke model is met R reflexief.

$$
\begin{array}{ll}
& M \models K\varphi \to \varphi \\
\Leftrightarrow & \quad \langle \text{ definitie modellering } \rangle \\
& \forall s \in S : (M, s) \models K\varphi \to \varphi \\
\Leftrightarrow & \quad \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (M, s) \models K\varphi \text{ dan } (M, s) \models \varphi \\
\Leftrightarrow & \quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (\forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } (M, t) \models \varphi) \text{ dan } (M, s) \models \varphi
\end{array}
$$

R is reflexief dus $\forall s \in S : (s, s) \in R$. Dit impliceert dat de verzameling van voorwaarden ($\forall t \in S$: als $(s, t) \in R$ dan $(M, t) \models \varphi$) in het bijzonder de voorwaarde $(M, s) \models \varphi$ bevat, waarmee het gestelde bewezen is. $\square$

Men kan ook aantonen dat de reflexiviteit van de toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is opdat kennis waar zou zijn in een Kripke model. Dit doen we in de volgende propositie, waarbij we de kernidee van het bewijs haalden bij Radzikowska et al. [14].

Propositie 2.2.6 (Nodige voorwaarde ware kennis)
In een Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ waarin geldt:

$$M \models K\varphi \to \varphi, \forall \varphi \in L_A$$

is R noodzakelijk reflexief.

Bewijs Bij veronderstelling geldt in elke wereld $s \in S$ van het Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ en voor elke formule φ dat

$$(M, s) \models K\varphi \to \varphi.$$

We zullen het gestelde door contrapositie bewijzen, m.a.w. we onderstellen dat R niet reflexief is. Stel daartoe dat $s' \in S$ een wereld is waarvoor $(s', s') \notin R$. Per definitie van het Kripke model bestaat er minstens één formule ψ die enkel geldt in s'. We hebben namelijk ondersteld dat de interpretatie van de atomische proposities uniek is per wereld ($\pi(s') \neq \pi(t)$ voor $s' \neq t$). Zij $A = \{p_1, p_2, \ldots\}$ de verzameling van atomische proposities, dan definiëren we voor elke p_i ($i = 1, 2, \ldots$): $q_i = p_i$ als $\pi(s')(p_i) = 1$ en $q_i = \neg p_i$ als $\pi(s')(p_i) = 0$. De conjunctie ψ van de q_i's ($i = 1, 2, \ldots$) is duidelijk enkel waar in s'. Er geldt dus:

$$(M, s') \models \psi \text{ en } (M, t) \not\models \psi, \forall t \neq s'.$$

Per definitie van de negatie geldt voor $\varphi := \neg\psi$:

$$(M, s') \not\models \varphi \text{ en } (M, t) \models \varphi, \forall t \neq s'. \tag{2.1}$$

We kunnen nu nagaan dat $(M, s') \models K\varphi$ geldt m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$(M, s') \models K\varphi \Leftrightarrow \forall t \in S : \text{als } (s', t) \in R \text{ dan } (M, t) \models \varphi$$

Uit (2.1) en het feit dat $(s', s') \notin R$ volgt duidelijk dat dit geldt. Uit (2.1) en het bovenstaande volgt:

$$\begin{aligned}
& (M, s') \models K\varphi \text{ en } (M, s') \not\models \varphi \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ logica-calculus: } (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \to Q) \ \rangle \\
& \neg(\text{als } (M, s') \models K\varphi \text{ dan } (M, s') \models \varphi) \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
& \neg((M, s') \models K\varphi \to \varphi)
\end{aligned}$$

We hebben m.a.w. een formule φ gevonden en een wereld s' waarvoor $(M, s') \not\models K\varphi \to \varphi$. Dit is in strijd met de assumptie, dus moet R noodzakelijk reflexief zijn. □

De uitbreiding van het systeem **K** met het axioma $K\varphi \to \varphi$ wordt het systeem **T** genoemd. Opnieuw is het mogelijk om te bewijzen dat dit systeem correct en volledig is met betrekking tot de klasse van Kripke modellen $\mathbf{M_r}$ met een reflexieve toegankelijkheidsrelatie [3].

2.2.4 Het systeem S4

Een tweede wenselijke eigenschap van kennis is dat men zijn eigen kennis kent, i.e. $K\varphi \to KK\varphi$. Maar opnieuw is dit niet gegarandeerd in ons huidig model, zoals het onderstaand eenvoudig voorbeeld illustreert.

Voorbeeld 3
Veronderstel $M = \langle S, \pi, R \rangle$ met:

- $A = \{p, q\}$,

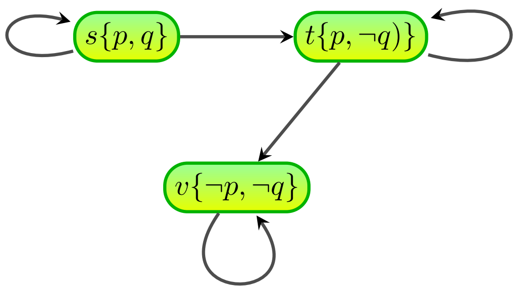
- $S = \{s, t, u\}$,
-

$\pi(.)(.)$	s	t	u
p	1	1	0
q	1	0	0

,

- $R = \{(s, s), (s, t), (t, t), (t, u), (u, u)\}$.

Dit levert onderstaand schema op.



Aangezien s en t de enige werelden zijn die toegankelijk zijn vanuit s en p waar is in zowel s als t, geldt $(M, s) \models Kp$. $(M, s) \models KKp$ is echter niet geldig. Als we dit uitschrijven, bekomen we

$$\begin{aligned}
&(M, s) \models KKp \\
&\Leftrightarrow \forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } (M, t) \models Kp \\
&\Leftrightarrow \forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } (\forall u \in S : \text{als } (t, u) \in R \text{ dan } (M, u) \models p)
\end{aligned}$$

Dit is niet geldig aangezien er een wereld bestaat (nl. u) bereikbaar vanuit een wereld die zelf bereikbaar is vanuit s, nl. vanuit t, waar p niet geldt, m.a.w. $(s, t) \in R$ en $(t, u) \in R$ maar $(M, u) \not\models p$. Per definitie van de implicatie bekomen we $(M, s) \not\models Kp \to KKp$. $\square$

Onderstaande propositie toont aan dat we dit probleem kunnen verhelpen door ons te beperken tot transitieve toegankelijkheidsrelaties.

Propositie 2.2.7 (Voldoende voorwaarde positieve introspectie [18])
In een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ met een transitieve toegankelijkheidsrelatie R geldt:

$$M \models K\varphi \to KK\varphi, \forall \varphi \in L_A.$$

Bewijs Veronderstel dat $M = \langle S, \pi, R\rangle$ een Kripke model is met R transitief.

$$\begin{aligned}
&M \models K\varphi \to KK\varphi \\
\Leftrightarrow\quad &\langle \text{ definitie modellering } \rangle \\
&\forall s \in S : (M, s) \models K\varphi \to KK\varphi \\
\Leftrightarrow\quad &\langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
&\forall s \in S : \text{als } (M, s) \models K\varphi \text{ dan } (M, s) \models KK\varphi \\
\Leftrightarrow\quad &\langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \forall s \in S: \text{ als } (\forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi) \text{ dan } (M,s) \models KK\varphi \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (\forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi) \text{ dan} \\
& (\forall u \in S : \text{als } (s,u) \in R \text{ dan } (M,u) \models K\varphi) \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (\forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi) \text{ dan} \\
& (\forall u \in S : \text{als } (s,u) \in R \text{ dan } (\forall v \in S : \text{als } (u,v) \in R \text{ dan } (M,v) \models \varphi)) \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

R is transitief dus $\forall s,u,v \in S$: als $(s,u) \in R$ en $(u,v) \in R$ dan $(s,v) \in R$. Dit impliceert dat de verzameling van voorwaarden $(\forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi)$ in het bijzonder de voorwaarden $(\forall u \in S : \text{als } (s,u) \in R \text{ dan } (\forall v \in S : \text{als } (u,v) \in R \text{ dan } (M,v) \models \varphi))$ bevat, waarmee het gestelde bewezen is. $\square$

Ook hier kan men aantonen dat de transitiviteit van de toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is opdat kennis gekend is in een Kripke model. Dit doen we in de volgende propositie, waarbij we opnieuw de inspiratie voor het bewijs haalden bij Radzikowska et al. [14].

Propositie 2.2.8 (Nodige voorwaarde positieve introspectie)
In een Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ waarin geldt:

$$M \models K\varphi \to KK\varphi, \forall \varphi \in L_A$$

is R noodzakelijk transitief.

Bewijs Bij veronderstelling geldt in elke wereld $s \in S$ van het Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ en voor elke formule φ dat

$$(M,s) \models K\varphi \to KK\varphi.$$

Uit de uitwerking in het vorige bewijs (zie (2.2)), is deze veronderstelling voor elke wereld s en elke formule φ equivalent met

$$
\begin{aligned}
& \text{als } (\forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi) \text{ dan} \\
& (\forall u \in S : \text{als } (s,u) \in R \text{ dan } (\forall v \in S : \text{als } (u,v) \in R \text{ dan } (M,v) \models \varphi)) \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

We zullen het gestelde door contrapositie bewijzen, m.a.w. we onderstellen dat R niet transitief is. Transitiviteit houdt in dat $\forall s,t,u \in S$: als $(s,t) \in R$ en $(t,u) \in R$ dan $(s,u) \in R$. Merk op dat dit altijd geldt indien $s = t$ of $t = u$. Stel daartoe dat s', t' en u' (met $s' \neq t'$ en $t' \neq u'$) werelden zijn waarvoor (s',t') en (t',u') tot R behoren, maar (s',u') niet. Zoals in het bewijs van propositie 2.2.6 kunnen we een formule φ vinden waarvoor geldt:

$$(M,u') \not\models \varphi \text{ en } (M,s) \models \varphi, \forall s \neq u'. \qquad (2.4)$$

We kunnen makkelijk zien dat $\forall t \in S$: als $(s',t) \in R$ dan $(M,t) \models \varphi$ geldt aangezien de enige wereld t waarvoor $(M,t) \not\models \varphi$ de wereld u' is en we veronderstellen dat $(s',u') \notin R$. We zien ook dat geldt:

$$
\begin{aligned}
& \neg(\forall u \in S : \text{als } (s',u) \in R \text{ dan } (\forall v \in S : \text{als } (u,v) \in R \text{ dan } (M,v) \models \varphi)) \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ logica-calculus: } \neg(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \ \rangle
\end{aligned}
$$

$$\exists u \in S : (s', u) \in R \text{ en } \neg(\forall v \in S : \text{als } (u, v) \in R \text{ dan } (M, v) \models \varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle \text{ logica-calculus: } \neg(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\exists x)(P(x) \land \neg Q(x)) \ \rangle$$
$$\exists u \in S : (s', u) \in R \text{ en } (\exists v \in S : (u, v) \in R \text{ en } (M, v) \not\models \varphi)$$

De wereld t' voldoet hier namelijk aan (t' speelt de rol van u en u' die van v), als gevolg van de veronderstelling dat $(s', t') \in R$, $(t', u') \in R$ en (2.4). Samengevat geldt er dus:

$$(\forall t \in S : \text{als } (s', t) \in R \text{ dan } (M, t) \models \varphi) \text{ en}$$
$$\neg(\forall u \in S : \text{als } (s', u) \in R \text{ dan } (\forall v \in S : \text{als } (u, v) \in R \text{ dan } (M, v) \models \varphi))$$

We zien dat dit net de negatie is van (2.3). We bekomen m.a.w. $(M, s') \not\models K\varphi \to KK\varphi$. Dit is in strijd met de assumptie, dus moet R noodzakelijk transitief zijn. □

De uitbreiding van het systeem **T** met het axioma $K\varphi \to KK\varphi$ levert ons het systeem **S4** op. Zoals we reeds vermeldden, houdt dit axioma in dat iemand kennis heeft van wat hij weet, daarom krijgt het de naam *positieve introspectie-axioma*. Opnieuw kan men aantonen dat het systeem **S4** correct en volledig is met betrekking tot de klasse van Kripke modellen $\mathbf{M_{r,t}}$ die een reflexieve en transitieve toegankelijkheidsrelatie hebben [1, 3, 29].

2.2.5 Het systeem S5

Nauw verwant met het *positieve introspectie-axioma* is het *negatieve introspectie-axioma* dat handelt over kennis van wat men niet weet, i.e. $\neg K\varphi \to K\neg K\varphi$. Dit axioma is weinig realistisch voor menselijke agenten: een mens is zich zeker niet altijd bewust van zijn eigen gebrek aan kennis. In sommige speciale gevallen, bijvoorbeeld met artificiële agenten of specifieke modellen, kan het axioma echter wel gerechtvaardigd zijn. Een eenvoudig voorbeeld toont aan dat deze eigenschap niet gegarandeerd is in onze huidige Kripke modellen.

Voorbeeld 4
Veronderstel $M = \langle S, \pi, R \rangle$ met:

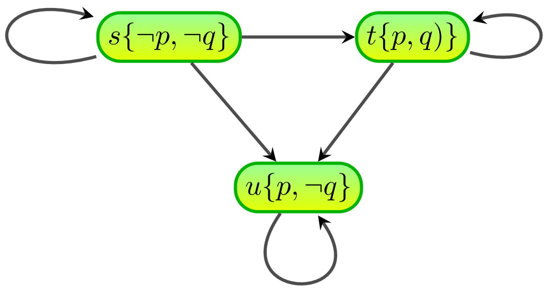
- $A = \{p, q\}$,
- $S = \{s, t, u\}$,
-

$\pi(.)(.)$	s	t	u
p	0	1	1
q	0	1	0

,

- $R = \{(s, s), (s, t), (s, u), (t, t), (t, u), (u, u)\}$.

Dit levert onderstaand schema op.



Aangezien niet in elke wereld toegankelijk vanuit s geldt dat p waar is, geldt $(M, s) \models \neg Kp$. Er geldt echter niet dat $(M, s) \models K\neg Kp$. We schrijven dit uit:

$$\begin{aligned}
& (M, s) \models K\neg Kp \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } (M, t) \models \neg Kp \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } \neg(\forall u \in S : \text{als } (t, u) \in R \text{ dan } (M, u) \models p) \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } (\exists u \in S : (t, u) \in R \text{ en } (M, u) \not\models p)
\end{aligned}$$

Dit is niet voldaan aangezien er een wereld bestaat toegankelijk vanuit s (nl. t) waarvoor er geen toegankelijke wereld bestaat die p niet modelleert. □

Deze keer vermeldt het artikel van Meyer [18] enkel dat het negatieve introspectie-axioma en de vorig vermelde axioma's voldaan zijn indien R een equivalentierelatie is. Opnieuw geïnspireerd door de vervagingen van deze en andere axioma's door Radzikowska en Kerre [14], komen we terecht bij Eucliditeit (i.e. $\forall s, t, u \in S$: als $(s, t) \in R$ en $(s, u) \in R$ dan $(t, u) \in R$) als nodige en voldoende voorwaarde voor het negatieve introspectie-axioma, wat de volgende proposities bewijzen.

Propositie 2.2.9 (Voldoende voorwaarde negatieve introspectie)
In een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ met een Euclidische toegankelijkheidsrelatie R geldt:

$$M \models \neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi, \forall \varphi \in L_A.$$

Bewijs Veronderstel dat $M = \langle S, \pi, R\rangle$ een Kripke model is met R Euclidisch.

$$\begin{aligned}
& M \models \neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi \\
\Leftrightarrow\ & \langle \text{ definitie modellering } \rangle \\
& \forall s \in S : (M, s) \models \neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi \\
\Leftrightarrow\ & \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (M, s) \models \neg K\varphi \text{ dan } (M, s) \models K\neg K\varphi \\
\Leftrightarrow\ & \langle \text{ definitie negatie } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (M, s) \not\models K\varphi \text{ dan } (M, s) \models K\neg K\varphi \\
\Leftrightarrow\ & \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } \neg(\forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } (M, t) \models \varphi) \text{ dan } (M, s) \models K\neg K\varphi \\
\Leftrightarrow\ & \langle \text{ logica-calculus: } \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \ \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (\exists t \in S : (s, t) \in R \text{ en } (M, t) \not\models \varphi) \text{ dan } (M, s) \models K\neg K\varphi \\
\Leftrightarrow\ & \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (\exists t \in S : (s, t) \in R \text{ en } (M, t) \not\models \varphi) \text{ dan} \\
& (\forall u \in S : \text{als } (s, u) \in R \text{ dan } (M, u) \models \neg K\varphi) \\
\Leftrightarrow\ & \langle \text{ definitie negatie } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (\exists t \in S : (s, t) \in R \text{ en } (M, t) \not\models \varphi) \text{ dan} \\
& (\forall u \in S : \text{als } (s, u) \in R \text{ dan } (M, u) \not\models K\varphi) \\
\Leftrightarrow\ & \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{ als } (\exists t \in S : (s, t) \in R \text{ en } (M, t) \not\models \varphi) \text{ dan} \\
& (\forall u \in S : \text{als } (s, u) \in R \text{ dan } \neg(\forall v \in S : \text{als } (u, v) \in R \text{ dan } (M, v) \models \varphi))
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \text{ logica-calculus: } \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \ \rangle$$
$$\forall s \in S : \text{als } (\exists t \in S : (s,t) \in R \text{ en } (M,t) \not\models \varphi) \text{ dan}$$
$$(\forall u \in S : \text{als } (s,u) \in R \text{ dan } (\exists v \in S : (u,v) \in R \text{ en } (M,v) \not\models \varphi)) \quad (2.5)$$

R is Euclidisch dus $\forall s,t,u \in S$: als $(s,u) \in R$ en $(s,t) \in R$ dan $(u,t) \in R$. Dit impliceert dat de verzameling van voorwaarden $(\exists t \in S : (s,t) \in R$ en $(M,t) \not\models \varphi)$ i.h.b. de voorwaarden $(\forall u \in S :$ als $(s,u) \in R$ dan $(\exists v \in S : (u,v) \in R$ en $(M,v) \not\models \varphi))$ bevat, waarmee het gestelde bewezen is. □

Ook hier kan men aantonen dat de Eucliditeit van de toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is opdat wat men niet weet, gekend is in een Kripke model. Dit doen we in de volgende propositie, waarvan het bewijs gelijkaardig verloopt als dat van propositie 2.2.8.

Propositie 2.2.10 (Nodige voorwaarde negatieve introspectie)
In een Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ waarin geldt:

$$M \models \neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi, \forall \varphi \in L_A$$

is R noodzakelijk Euclidisch.

Bewijs Bij veronderstelling geldt in elke wereld $s \in S$ van het Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ en voor elke formule φ dat

$$(M,s) \models \neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi.$$

Uit de uitwerking in het vorige bewijs (zie (2.5)), is deze veronderstelling voor elke wereld s en elke formule φ equivalent met

$$\text{als } (\exists t \in S : (s,t) \in R \text{ en } (M,t) \not\models \varphi) \text{ dan}$$
$$(\forall u \in S : \text{als } (s,u) \in R \text{ dan } (\exists v \in S : (u,v) \in R \text{ en } (M,v) \not\models \varphi)) \quad (2.6)$$

We zullen het gestelde door contrapositie bewijzen, m.a.w. we onderstellen dat R niet Euclidisch is. Euclíditeit houdt in dat $\forall s,t,u \in S$: als $(s,t) \in R$ en $(s,u) \in R$ dan $(t,u) \in R$. Merk op dat dit altijd geldt indien $s = t$ of $s = u$. Stel daartoe dat s', t' en u' (met $s' \neq t'$ en $s' \neq u'$) werelden zijn waarvoor (s',t') en (s',u') tot R behoren, maar (t',u') niet. Zoals in het bewijs van propositie 2.2.6 kunnen we een formule φ vinden waarvoor geldt:

$$(M,u') \not\models \varphi \text{ en } (M,s) \models \varphi, \forall s \neq u'. \quad (2.7)$$

We kunnen makkelijk zien dat $\exists t \in S : (s',t) \in R$ en $(M,t) \not\models \varphi$ geldt aangezien de wereld u' hieraan voldoet. We zien ook dat geldt:

$$\neg(\forall u \in S : \text{als } (s',u) \in R \text{ dan } (\exists v \in S : (u,v) \in R \text{ en } (M,v) \not\models \varphi))$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle \text{ logica-calculus: } \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \ \rangle$$
$$\exists u \in S : (s',u) \in R \text{ en } \neg(\exists v \in S : (u,v) \in R \text{ en } (M,v) \not\models \varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle \text{ logica-calculus: } \neg(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \ \rangle$$
$$\exists u \in S : (s',u) \in R \text{ en } (\forall v \in S : \text{als } (u,v) \in R \text{ dan } (M,v) \models \varphi)$$

De wereld t' voldoet hier namelijk aan, als gevolg van (2.7) en de veronderstelling dat (s',t') tot R behoort, maar (t',u') niet. Samengevat geldt er dus:

$$(\exists t \in S : (s',t) \in R \text{ en } (M,t) \not\models \varphi) \text{ en}$$

$$\neg(\forall u \in S : \text{als } (s', u) \in R \text{ dan } (\exists v \in S : (u, v) \in R \text{ en } (M, v) \not\models \varphi))$$

We zien dat dit net de negatie is van (2.6). We bekomen m.a.w. $(M, s') \not\models \neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi$. Dit is in strijd met de assumptie, dus moet R noodzakelijk Euclidisch zijn. □

De uitbreiding van het systeem **S4** met het negatieve introspectie-axioma $\neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi$ levert ons het systeem **S5** op, de meest gebruikte logica voor kennis.

Axiomasysteem 2.2.2 (Systeem **S5**)

- een axiomatisatie van propositionele logica op basis van de logische connector $\rightarrow$ en de logische constante $\bar{0}$ [28]:
  - $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$,
  - $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$,
  - $((\varphi \rightarrow \bar{0}) \rightarrow (\psi \rightarrow \bar{0})) \rightarrow ((\psi \rightarrow \bar{0}) \rightarrow \varphi)$,
  - modus ponens: $\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$,
  - substitutieregel: $\forall \vec{\psi} : \frac{\varphi(\vec{p})}{\varphi(\frac{\vec{\psi}}{\vec{p}})}$,
- $K(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K\varphi \rightarrow K\psi)$,
- noodzakelijkheidsregel: $\frac{\varphi}{K\varphi}$,
- $K\varphi \rightarrow \varphi$,
- $K\varphi \rightarrow KK\varphi$,
- $\neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi$.

Opnieuw kan men aantonen dat het systeem **S5** correct en volledig is t.o.v. de klasse van Kripke modellen $\mathbf{M_e}$ die een reflexieve, transitieve en symmetrische toegankelijkheidsrelatie hebben, m.a.w. de klasse van Kripke modellen waarvoor de toegankelijkheidsrelatie een equivalentierelatie is [1,3,29]. Merk enerzijds op dat een symmetrische en transitieve relatie i.h.b. Euclidisch is: stel dat voor willekeurige elementen $s, t, u \in S$ geldt dat $(s, t) \in R$ en $(s, u) \in R$. Dan moet gelden dat $(t, u) \in R$ opdat R Euclidisch zou zijn. Uit de symmetrie van R volgt dat $(t, s) \in R$. Bijgevolg geldt dat $(t, s) \in R$ en $(s, u) \in R$. Uit de transitiviteit van R volgt dat $(t, u) \in R$. Wegens propositie 2.2.9 mogen we er dus op vertrouwen dat het negatieve introspectie-axioma geldt voor equivalentietoegankelijkheidsrelaties aangezien deze i.h.b. Euclidisch zijn. Anderzijds geldt ook dat de voorwaarden op R die de axioma's van **S5** met zich meebrengen, nl. reflexiviteit, transitiviteit en Eucliditeit, impliceren dat R eveneens symmetrisch is en dus een equivalentierelatie is. Onderstel daartoe dat voor willekeurige elementen $s, t \in S$ geldt dat $(s, t) \in R$. Uit de reflexiviteit volgt dat $(s, s) \in R$. Uit $(s, t) \in R$ en $(s, s) \in R$ en de Eucliditeit van R volgt dat $(t, s) \in R$, m.a.w. R is inderdaad symmetrisch. Tenslotte gaan we, met het oog op later, nog de geldigheid van een extra axioma na, nl. $\varphi \rightarrow K\neg K\neg\varphi$.

Propositie 2.2.11
In een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ met een symmetrische toegankelijkheidsrelatie R geldt:

$$M \models \varphi \rightarrow K\neg K\neg\varphi, \forall \varphi \in L_A.$$

Bewijs Veronderstel dat $M = \langle S, \pi, R\rangle$ een Kripke model is met R symmetrisch.

$$\begin{array}{ll}
 & M \models \varphi \to K\neg K\neg\varphi \\
\Leftrightarrow & \langle \text{ definitie modellering } \rangle \\
 & \forall s \in S : (M, s) \models \varphi \to K\neg K\neg\varphi \\
\Leftrightarrow & \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
 & \forall s \in S : \text{als } (M, s) \models \varphi \text{ dan } (M, s) \models K\neg K\neg\varphi \\
\Leftrightarrow & \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
 & \forall s \in S : \text{als } (M, s) \models \varphi \text{ dan } (\forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } (M, t) \models \neg K\neg\varphi) \\
\Leftrightarrow & \langle \text{ definitie negatie } \rangle \\
 & \forall s \in S : \text{als } (M, s) \models \varphi \text{ dan } (\forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } (M, t) \not\models K\neg\varphi) \\
\Leftrightarrow & \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
 & \forall s \in S : \text{als } (M, s) \models \varphi \text{ dan } (\forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan} \\
 & \neg(\forall u \in S : \text{als } (t, u) \in R \text{ dan } (M, u) \models \neg\varphi)) \\
\Leftrightarrow & \langle \text{ definitie negatie } \rangle \\
 & \forall s \in S : \text{als } (M, s) \models \varphi \text{ dan } (\forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan} \\
 & \neg(\forall u \in S : \text{als } (t, u) \in R \text{ dan } (M, u) \not\models \varphi)) \\
\Leftrightarrow & \langle \text{ logica-calculus: } \neg(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \rangle \\
 & \forall s \in S : \text{als } (M, s) \models \varphi \text{ dan } (\forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan} \\
 & (\exists u \in S : (t, u) \in R \text{ en } (M, u) \models \varphi))
\end{array} \tag{2.8}$$

R is symmetrisch dus $\forall s, t \in S$: als $(s, t) \in R$ dan $(t, s) \in R$. We zien dus dat, als $(M, s) \models \varphi$ geldt, er effectief voor elke $t \in S$, waarvoor (s, t) tot R behoort, een wereld u bestaat zodanig dat $(t, u) \in R$ en $(M, u) \models \varphi)$), nl. de wereld s. Hiermee is het gestelde bewezen. $\square$

Men kan ook aantonen dat symmetrie van de toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is voor dit axioma. Het bewijs verloopt analoog als dat van propositie 2.2.10.

Propositie 2.2.12
In een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ waarin geldt:

$$M \models \varphi \to K\neg K\neg\varphi, \forall\varphi \in L_A$$

is R noodzakelijk symmetrisch.

Bewijs Bij veronderstelling geldt in elke wereld $s \in S$ van het Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ en voor elke formule φ dat

$$(M, s) \models \varphi \to K\neg K\neg\varphi.$$

Uit de uitwerking in het vorige bewijs (zie (2.8)) volgt dat deze veronderstelling voor elke wereld s en elke formule φ equivalent is met

$$\text{als } (M, s) \models \varphi \text{ dan } (\forall t \in S : \text{als } (s, t) \in R \text{ dan } (\exists u \in S : (t, u) \in R \text{ en } (M, u) \models \varphi)) \tag{2.9}$$

We zullen het gestelde door contrapositie bewijzen, m.a.w. we onderstellen dat R niet symmetrisch is. Stel daartoe dat s' en t' twee werelden zijn uit S waarvoor geldt dat

$(s', t') \in R$ maar $(t', s') \notin R$. Merk op dat dit impliceert dat $s' \neq t'$. Zoals in het bewijs van propositie 2.2.6 kunnen we een formule φ vinden waarvoor geldt:

$$(M, s') \models \varphi \text{ en } (M, t) \not\models \varphi, \forall t \neq s'. \tag{2.10}$$

We bekomen m.a.w. dat $(M, s') \models \varphi$ en $(s', t') \in R$. Opdat (2.9) voldaan zou zijn voor de wereld s' moeten we een wereld u vinden waarvoor $(t', u) \in R$ en $(M, u) \models \varphi$. De tweede voorwaarde is echter enkel voldaan voor s' wegens (2.10). Maar deze wereld voldoet niet aan de eerste voorwaarde aangezien we verondersteld hebben dat $(t', s') \notin R$. We bekomen m.a.w. $(M, s') \not\models \varphi \to K\neg K\neg\varphi$. Dit is in strijd met de assumptie, dus moet R noodzakelijk symmetrisch zijn. □

Merk nog op dat het axioma uit bovenstaande proposities wegens de definitie van de duale kennisoperator ook geschreven kan worden als $\varphi \to K\bar{K}\varphi$.

2.2.6 Geloof

Naast kennis kunnen we ook geloof modelleren [18]. We zullen de geloofsoperator als B noteren (afkomstig van het Engelse **b**elief) en voor elke formule φ kunnen we $B\varphi$ interpreteren als φ *wordt geloofd*. Naar analogie met de duale kennisoperator $\bar{K}$, kunnen we de duale geloofsoperator $\bar{B}$ definiëren als $\bar{B}\varphi := \neg B\neg\varphi$, $\forall\varphi \in L_A$. Kennis en geloof zijn sterk gerelateerd in de zin dat ze veel gemeenschappelijke eigenschappen hebben en dat we dezelfde definities voor modellering hanteren. Er is echter 1 groot verschil: terwijl kennis altijd waar is (ten minste als we ons beperken tot de klasse van Kripke modellen met een reflexieve toegankelijkheidsrelatie), hoeft dit voor geloof niet zo te zijn! Het is perfect mogelijk dat je iets gelooft dat niet waar is. Als dit niet zo zou zijn, zouden mensen immers nooit van mening verschillen aangezien ze allemaal hetzelfde geloven, namelijk de waarheid (op voorwaarde dat we er van uitgaan dat er zoiets bestaat als de waarheid, maar we hebben het hier nog steeds over wiskunde en niet over filosofie). Om terug te keren naar het voorbeeld over mijn koelkast uit de inleiding (hoofdstuk 1): ik kan geloven dat er nog melk inzit terwijl mijn huisgenoot ervan overtuigd kan zijn dat er geen melk inzit. Aangezien we niet over kwantummechanische melk beschikken, staat het vast dat een van ons beiden iets gelooft dat niet waar is. Het axioma $K\varphi \to \varphi$ zullen we dus niet overnemen als we geloof willen modelleren.

Naar analogie met het systeem **K** (zie axiomasysteem 2.2.1) en rekening houdend met de gemeenschappelijke eigenschappen van kennis en geloof, kunnen we dus een systeem **K45** voor geloof axiomatiseren d.m.v. volgende axioma's.

Axiomasysteem 2.2.3 (Systeem **K45**)

- een axiomatisatie van propositionele logica op basis van de logische connector $\to$ en de logische constante $\bar{0}$ [28]:
  - $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  - $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
  - $(\varphi \to \bar{0}) \to (\psi \to \bar{0})) \to ((\psi \to \bar{0}) \to \varphi)$
  - modus ponens: $\frac{\varphi \quad \varphi\to\psi}{\psi}$,
  - substitutieregel: $\forall\vec{\psi} : \frac{\varphi(\vec{p})}{\varphi(\frac{\vec{\psi}}{\vec{p}})}$,

- $B(\varphi \to \psi) \to (B\varphi \to B\psi)$,
- noodzakelijkheidsregel: $\frac{\varphi}{B\varphi}$,
- $B\varphi \to BB\varphi$,
- $\neg B\varphi \to B\neg B\varphi$.

Men kan aantonen dat dit systeem correct en volledig is met betrekking tot de klasse van Kripke modellen $\mathbf{M_{t,E}}$ die een transitieve en Euclidische toegankelijkheidsrelatie hebben [29].

Meestal eist men ook dat geloof consistent is, i.e. $B\varphi \to \bar{B}\varphi$. Dit axioma wordt vaak het *D-axioma* genoemd omdat het typisch is voor deontische logica [18]. Deontische logica heeft een modale operator O die de modaliteit *het is verplicht dat* uitdrukt. A.d.h.v. van deze operator kunnen we de modale operator P, corresponderend met de modaliteit *het is toegestaan dat*, definiëren als $P\varphi := \neg O\neg\varphi$ voor een formule φ en de modale operator F, corresponderend met de modaliteit *het is verboden dat*, definiëren als $F\varphi := O\neg\varphi$. Het *D-axioma* met O i.p.v. B drukt dan uit dat, als iets verplicht is, dat het dan niet verboden is of m.a.w. dat iets niet tegelijkertijd verplicht en verboden kan zijn. Als we dit axioma toevoegen aan axiomasysteem 2.2.3, bekomen we het systeem **KD45** of zwakke **S5**. Men kan dan aantonen dat dit systeem correct en volledig is t.o.v. de klasse van Kripke modellen $\mathbf{M_{t,E,s}}$ die een transitieve, Euclidische en seriële ($\forall s \in S, \exists t \in S : (s,t) \in R$) toegankelijkheidsrelatie hebben [29]. Merk op dat serialiteit dus inhoudt dat elke wereld minstens één epistemisch alternatief heeft, een eigenschap van de toegankelijkheidsrelatie die (net als reflexiviteit) het probleem van doodlopende eindes oplost (cfr. opmerking 2.2.2).

Propositie 2.2.13 (Voldoende voorwaarde D-axioma)
In een Kripke model $M = \langle S, \pi, R\rangle$ met een seriële toegankelijkheidsrelatie R geldt:

$$M \models B\varphi \to \neg B\neg\varphi, \forall\varphi \in L_A.$$

Bewijs Veronderstel dat $M = \langle S, \pi, R\rangle$ een Kripke model is met R serieel.

$$\begin{aligned}
& M \models B\varphi \to \neg B\neg\varphi \\
\Leftrightarrow\quad & \langle \text{ definitie modellering } \rangle \\
& \forall s \in S : (M,s) \models B\varphi \to \neg B\neg\varphi \\
\Leftrightarrow\quad & \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (M,s) \models B\varphi \text{ dan } (M,s) \models \neg B\neg\varphi \\
\Leftrightarrow\quad & \langle \text{ definitie geloofsoperator } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (\forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi) \text{ dan } (M,s) \models \neg B\neg\varphi \\
\Leftrightarrow\quad & \langle \text{ definitie negatie } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (\forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi) \text{ dan } (M,s) \not\models B\neg\varphi \\
\Leftrightarrow\quad & \langle \text{ definitie geloofsoperator } \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (\forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi) \text{ dan} \\
& \neg(\forall u \in S : \text{als } (s,u) \in R \text{ dan } (M,u) \models \neg\varphi) \\
\Leftrightarrow\quad & \langle \text{ definitie negatie } \rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \forall s \in S : \text{als } (\forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi) \text{ dan} \\
& \neg(\forall u \in S : \text{als } (s,u) \in R \text{ dan } (M,u) \not\models \varphi) \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ logica-calculus: } \neg(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x)) \rangle \\
& \forall s \in S : \text{als } (\forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi) \text{ dan} \\
& (\exists u \in S : (s,u) \in R \text{ en } (M,u) \models \varphi) \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

R is serieel dus $\forall s \in S : \exists t \in S : (s,t) \in R$. Dit impliceert dat de verzameling van voorwaarden ($\forall t \in S$: als $(s,t) \in R$ dan $(M,t) \models \varphi$) samen met de serialiteit van R leidt tot ($\exists u \in S : (s,u) \in R$ en $(M,u) \models \varphi$), waarmee het gestelde bewezen is. □

In de volgende propositie tonen we aan dat serialiteit van de toegankelijkheidsrelatie eveneens een nodige voorwaarde is opdat het D-axioma zou gelden. Het bewijs verloopt gelijkaardig als dat van propositie 2.2.8.

Propositie 2.2.14 (Nodige voorwaarde D-axioma)
In een Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ waarin geldt:

$$M \models B\varphi \to \neg B \neg \varphi, \forall \varphi \in L_A$$

is R noodzakelijk serieel.

Bewijs Bij veronderstelling geldt in elke wereld $s \in S$ van het Kripke model $M = \langle S, \pi, R \rangle$ en voor elke formule φ dat

$$(M,s) \models B\varphi \to \neg B \neg \varphi.$$

Uit de uitwerking in het vorige bewijs (zie (2.11)), is deze veronderstelling voor elke wereld s en elke formule φ equivalent met

$$
\begin{aligned}
& \text{als } (\forall t \in S : \text{als } (s,t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi) \text{ dan} \\
& (\exists u \in S : (s,u) \in R \text{ en } (M,u) \models \varphi) \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

We zullen het gestelde door contrapositie bewijzen, m.a.w. we onderstellen dat R niet serieel is. Stel daartoe dat $s' \in S$ een wereld is waarvoor geldt dat $(s',t) \notin R, \forall t \in S$. We zien dat ($\forall t \in S$: als $(s',t) \in R$ dan $(M,t) \models \varphi$) geldt aangezien dit direct volgt uit het feit dat $(s',t) \notin R, \forall t \in S$. Om dezelfde reden geldt eveneens:

$$\neg(\exists u \in S : (s',u) \in R \text{ en } (M,u) \models \varphi),$$

Combineren we deze 2, dan bekomen we:

$$
\begin{aligned}
& (\forall t \in S : \text{als } (s',t) \in R \text{ dan } (M,t) \models \varphi) \text{ en} \\
& \neg(\exists u \in S : (s',u) \in R \text{ en } (M,u) \models \varphi),
\end{aligned}
$$

wat precies de negatie is van (2.12). Bijgevolg geldt $(M,s') \not\models B\varphi \to \neg B \neg \varphi$. Dit is in strijd met de assumptie, dus moet R noodzakelijk serieel zijn. □

Opmerking 2.2.4

- Het D-axioma $K\varphi \to \bar{K}\varphi$ is geldig in **S5**. Immers is **S5** volledig t.o.v. de klasse Kripke modellen met R een equivalentierelatie. Dit wil zeggen dat elke tautologie van deze modellen geldig is in **S5**. Uit propositie 2.2.13 volgt dat het D-axioma zo'n tautologie is, aangezien elke equivalentierelatie i.h.b. serieel is. Men kan echter ook op een andere manier inzien dat het D-axioma geldt in **S5**, nl. door rechtstreeks gebruik te maken van axiomasysteem 2.2.2 van **S5**. We zien namelijk dat kennis steeds waar is in **S5** aangezien $K\varphi \to \varphi$ een axioma is. In de scherpe propositionele logica geldt dat $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi), \forall \varphi, \psi \in L_A$. Passen we dit toe op het axioma $K\varphi \to \varphi$ dan zien we dat eveneens geldt in **S5**: $\neg\varphi \to \neg K\varphi$. Dit geldt voor alle formules φ, dus ook voor alle negaties van alle formules aangezien dit weer formules zijn per definitie van onze logische taal. We krijgen m.a.w. $\varphi \to \neg K \neg \varphi$ of per definitie van de duale kennisoperator $\varphi \to \bar{K}\varphi$. In de propositionele logica geldt (als gevolg van modus ponens) dat als $\varphi \to \psi$ en $\psi \to \chi$ dat dan $\varphi \to \chi$. Toegepast op $K\varphi \to \varphi$ en $\varphi \to \bar{K}\varphi$ levert dit ons precies het D-axioma op. Ook op niveau van voorwaarden op R is dit logisch: het axioma waaruit het D-axioma volgt, is geldig onder reflexieve toegankelijkheidsrelaties en reflexiviteit impliceert serialiteit.

- We zullen in dit werk geen vage uitbreidingen m.b.t. geloof beschouwen, we beperken ons in het vage geval tot de kennisoperator. Het D-axioma zal echter wel nog terugkomen in hoofdstuk 5 (zie proposities 5.2.2 en 5.2.3). □

2.2.7 Overzicht axioma's en afleidingsregels

We vatten alle axioma's en afleidingsregels m.b.t. de modale operator samen in tabel 2.1 met hun corresponderende nodige en voldoende voorwaarden op de toegankelijkheidsrelatie R. Indien een axioma geldig is onder elke toegankelijkheidsrelatie en er dus geen voorwaarden nodig zijn op R, staat er een streepje bij de nodige voorwaarden en mag R een willekeurige relatie in S zijn. Merk ten slotte nog op dat de verzameling van alle formules φ gelijk is aan de verzameling van de negatie van alle formules (symbolisch $L_A = \neg L_A$, waarbij $\neg L_A := \{\neg\varphi | \varphi \in L_A\}$). Met elke formule φ kunnen we namelijk een formule $\psi := \neg\varphi$ laten corresponderen die de negatie is van φ. Omgekeerd is elke formule ψ de negatie van een formule φ, nl. van $\varphi := \neg\psi$, omdat in de klassieke propositionele logica geldt dat $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$. Bijgevolg kan het negatieve introspectie-axioma $\neg K\varphi \to K\neg K\varphi$ ook geschreven kan worden als het equivalente axioma $\bar{K}\varphi \to K\bar{K}\varphi$.

axioma	nodige voorwaarde	voldoende voorwaarde
$K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$	/	willek. R (pr. 2.2.2(1))
$K\varphi \to \bar{K}\varphi$	ser. R (pr. 2.2.14)	ser. R (pr. 2.2.13)
$K\varphi \to \varphi$	refl. R (pr. 2.2.6)	refl. R (pr. 2.2.5)
$K\varphi \to KK\varphi$	trans. R (pr. 2.2.8)	trans. R (pr. 2.2.7)
$\bar{K}\varphi \to K\bar{K}\varphi$	Eucl. R (pr. 2.2.10)	Eucl. R (pr. 2.2.9)
$\varphi \to K\bar{K}\varphi$	symm. R (pr. 2.2.12)	symm. R (pr. 2.2.11)
afleidingsregel	**nodige voorwaarde**	**voldoende voorwaarde**
$\frac{\varphi}{K\varphi}$	/	willek. R (pr. 2.2.2(2))

Tabel 2.1: Nodige en voldoende voorwaarden per axioma of afleidingsregel

Om misverstanden te vermijden, schrijven we tenslotte nog eens concreet uit wat we bedoelen met een nodige en voldoende voorwaarde op R voor een axioma. Zij α een willekeurig axioma en zij P een voorwaarde op R. Zo kan α bijvoorbeeld $K\varphi \to \bar{K}\varphi$

zijn en P is dan serieel. We voeren nog enkele notaties in. Om aan te geven dat elke instantie van het axioma α geldt in een model M noteren we $M \models \alpha$. Zoals steeds is A een niet-ledige, aftelbare verzameling van atomische proposities. Indien S een niet-ledige verzameling van mogelijke werelden is, noteren we alle mogelijke interpretaties π van de atomische proposities uit A per wereld als Π_S, m.a.w.

$$\Pi_S = \{\pi | \pi : S \to (A \to \{0, 1\})\}.$$

Eigenschap P van R is een voldoende voorwaarde voor axioma α:

$$\forall S \neq \phi, \forall \pi \in \Pi_S : R \text{ heeft eigenschap } P \Rightarrow \langle S, \pi, R \rangle \models \alpha. \tag{2.13}$$

Eigenschap P van R is een nodige voorwaarde voor axioma α:

$$\forall S \neq \phi, \forall \pi \in \Pi_S : \langle S, \pi, R \rangle \models \alpha \Rightarrow R \text{ heeft eigenschap } P. \tag{2.14}$$

Hoofdstuk 3

Vaagverzamelingen, vaaglogica en ordestructuren

3.1 Basisbegrippen vaagheid

Vooraleer we kunnen overgaan naar de vervaging van modale logica, brengen we enkele basisbegrippen van vaagheid in herinnering. De basisidee van vaagheid is om zaken niet zwart-wit voor te stellen maar ook grijstinten toe te staan. Deze idee is ruim toepasbaar. Zo spreekt men ondertussen van vaagverzamelingen, vaagrelaties, vaagafbeeldingen, vaaglogica, etc. Het is een jong onderzoeksdomein waarvan Zadeh in de jaren '60 de fundamenten legde, o.a. met zijn artikel over vaagverzamelingen in 1965 [35]. Talrijke wetenschappers hebben na hem het vakgebied van de vaagheid uitgebreid en specifieke domeinen uitgediept. Ongetwijfeld heeft de vaagheid nog lang niet al haar geheimen onthuld. Hieronder volgen begrippen, definities en eigenschappen die nodig zijn voor de lezer om het vervolg van dit werk te begrijpen [10, 14, 16].

Beschouw twee universa X en Y. Met een universum bedoelen we een niet-ledige verzameling.

Definitie 3.1.1 (Vaagverzameling [14])
We noemen een afbeelding H een vaagverzameling in X als H elk element $x \in X$ afbeeldt op een waarde uit het eenheidsinterval $[0, 1]$.

We noteren de klasse van vaagverzamelingen in X als $\mathcal{F}(X)$, i.e. de klasse van alle $X \to [0, 1]$ afbeeldingen.

Definitie 3.1.2 (Vaagrelatie [14])
Een vaagrelatie R op X is een vaagverzameling in X^n, m.a.w. $R : X \times X \times \ldots \times X \to [0, 1]$ ($n \geq 2$). Als $n = 2$ spreken we van een binaire vaagrelatie op X.

Een binaire vaagrelatie R beeldt met andere woorden elk koppel $(x, y) \in X^2$ af op een waarde uit het eenheidsinterval, genoteerd als $R(x, y)$. Deze waarde is de mate waarin het koppel tot de vaagrelatie behoort. We noteren de klasse van binaire vaagrelaties op X als $\mathcal{R}(X)$ (uit de definitie volgt dat dit equivalent is met $\mathcal{F}(X^2)$).

Ons doel is om een vaag Kripke model te introduceren, in de betekenis dat de waarheidswaarden van een atomische propositie $p \in A$ elke waarde tussen 0 en 1 kunnen aannemen.

Definitie 3.1.3 (Interpretatie)
Een interpretatie π van de atomische proposities is een vaagverzameling in A m.a.w. $\pi \in \mathcal{F}(A)$.

Op basis van de waarheidswaarden van de atomische proposities wensen we in staat te zijn om samengestelde formules te evalueren. We hebben dus nood aan vage vertalingen van de klassieke logische connectoren ($\neg, \wedge, \vee$ en $\rightarrow$). Voor de conjunctie zoeken we met andere woorden een binaire operatie gedefineerd op elementen uit het eenheidsinterval. Deze operatie moet dan a.d.h.v. van de waarheidswaarden van de formules φ en ψ de waarheidswaarde van de conjunctie van deze formules kunnen bepalen. Triangulaire normen blijken deze klus te klaren.

Definitie 3.1.4 (Triangulaire norm [14])
Een triangulaire norm (of kort t-norm) T is een $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ afbeelding die aan de volgende eigenschappen voldoet, voor alle $a, b, c \in [0,1]$:

- $T(a,b) = T(b,a)$ *(commutativiteit of symmetrie),*
- $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$ *(associativiteit),*
- $a \leq c \Rightarrow T(a,b) \leq T(c,b)$ *(monotoniciteit),*
- $T(a,1) = a$ *(randvoorwaarde).*

Intuïtief vallen de eigenschappen van t-normen inderdaad te linken met conjunctie. Merk tenslotte op dat in het geval van een beperking tot de waarden 0 en 1 geldt dat $T(\pi(p), \pi(q)) = \pi(p \wedge q)$ voor formules p en q en een (scherpe) interpretatie π (dit is makkelijk te verifiëren m.b.v. waarheidstabellen). We kunnen dus effectief spreken van een vage uitbreiding. Volgende eigenschappen van t-normen zijn makkelijk uit de definitie af te leiden.

Eigenschap 3.1.1 (Eigenschappen triangulaire norm)
Zij T een t-norm en $a, b, c, d \in [0,1]$, dan geldt:

1. $a \leq c$ *en* $b \leq d \Rightarrow T(a,b) \leq T(c,d)$ *[16],*
2. $T(a,0) = 0$ *[16],*
3. $T(a,b) = 1 \Leftrightarrow a = b = 1$*,*
4. $T(T(a,b),T(c,d)) = T(a,T(b,T(c,d))) = T(T(a,c),T(b,d)) = T(T(T(a,b),c),d)$*.*

Bewijs Ter illustratie bewijzen we de derde en vierde eigenschap.

3. $\boxed{\Rightarrow}$ We tonen aan dat uit $a < 1$ volgt dat $T(a,b) < 1$ aangezien een t-norm monotoon stijgend is: $T(a,b) \leq T(a,1) = a < 1$. Omwille van de symmetrie van een t-norm geldt hetzelfde voor b. Hieruit volgt dat $T(a,b)$ slechts de waarde 1 kan aannemen als $a = b = 1$.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Dit volgt direct uit de randvoorwaarde van een t-norm.

4. We passen herhaaldelijk de associativiteit en commutativiteit toe:

$$T(T(a,b),T(c,d)) = T(a,T(b,T(c,d))) = T(a,T(T(b,d),c)) = T(T(a,c),T(b,d)),$$
$$T(T(a,b),T(c,d)) = T(T(T(a,b),c),d) \qquad \square$$

Definitie 3.1.5 ((Links)continue triangulaire norm)
Een t-norm T is (links)continu indien al haar partiële afbeeldingen linkscontinu zijn. Analoog spreekt men van een rechtscontinue t-norm. We zullen de klasse van continue t-normen noteren als $\mathcal{T}_c$.

Merk op dat een continue t-norm zowel links- als rechtscontinu is. We vermelden nog een handige eigenschap van (links- of rechts)continue t-normen.

Eigenschap 3.1.2
Zij T een t-norm, a een willekeurig element van $[0,1]$ en $(b_i)_{i\in I}$ een familie in $[0,1]$ (i.e. $\forall i \in I : b_i \in [0,1]$), dan geldt er:

1. *T is linkscontinu $\Rightarrow T(a, \sup_{i\in I} b_i) = \sup_{i\in I} T(a, b_i)$,*
2. *T is rechtscontinu $\Rightarrow T(a, \inf_{i\in I} b_i) = \inf_{i\in I} T(a, b_i)$.*

Bewijs

1. Uit de monotoniciteit van de t-norm T volgt dat de afbeelding $T(a, .)$ stijgend is. Uit de definitie van het supremum volgt:
$$\sup_{i\in I} T(a, b_i) \geq T(a, b_j), \forall j \in I,$$
$$\sup_{i\in I} b_i \geq b_j, \forall j \in I \Rightarrow T(a, \sup_{i\in I} b_i) \geq T(a, b_j), \forall j \in I.$$
Zowel $\sup_{i\in I} T(a, b_i)$ als $T(a, \sup_{i\in I} b_i)$ zijn dus bovengrenzen van de verzameling $\{T(a, b_j) | j \in I\}$. Aangezien $\sup_{i\in I} T(a, b_i)$ de kleinste bovengrens is per definitie van het supremum, geldt $T(a, \sup_{i\in I} b_i) \geq \sup_{i\in I} T(a, b_i)$. Het is dus voldoende aan te tonen dat $T(a, \sup_{i\in I} b_i) \leq \sup_{i\in I} T(a, b_i)$.
Gebruik makend van de eigenschappen van het supremum vinden we voor elke $\epsilon > 0$ een b_ϵ waarvoor $\sup_{i\in I} b_i - \epsilon < b_\epsilon$. Uit het stijgend zijn van $T(a, .)$ en de definitie van het supremum volgt dan $T(a, \sup_{i\in I} b_i - \epsilon) \leq T(a, b_\epsilon) \leq \sup_{i\in I} T(a, b_i)$. Laten we nu ϵ naar nul naderen, dan bekomen we omwille van de linkscontinuïteit van $T(a, .)$ dat $T(a, \sup_{i\in I} b_i) \leq \sup_{i\in I} T(a, b_i)$.
2. Dit kan op analoge wijze als het vorige aangetoond worden. □

Met het oog op later, vermelden we ook nog een andere praktische eigenschap i.v.m. het supremum en het infimum.

Eigenschap 3.1.3 (Omwisseling suprema en infima)
Beschouw een familie $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ in $[0,1]$. Dan geldt:

1. $\sup_{i\in I} \sup_{j\in J} a_{ij} = \sup_{j\in J} \sup_{i\in I} a_{ij}$,
2. $\inf_{i\in I} \inf_{j\in J} a_{ij} = \inf_{j\in J} \inf_{i\in I} a_{ij}$,
3. $\inf_{i\in I} \sup_{j\in J} a_{ij} \geq \sup_{j\in J} \inf_{i\in I} a_{ij}$.

Bewijs

1. Uit de definitie van het supremum volgt dat voor elke $(k, j) \in I \times J$ geldt dat $a_{kj} \leq \sup_{i\in I} a_{ij}$. Als we nu van beide leden het supremum over $j \in J$ nemen, bekomen we $\sup_{j\in J} a_{kj} \leq \sup_{j\in J} \sup_{i\in I} a_{ij}$, $\forall k \in I$. Nemen we nu het supremum

over $k \in I$, dan bekomen we $\sup_{k\in I} \sup_{j\in J} a_{kj} \leq \sup_{j\in J} \sup_{i\in I} a_{ij}$. We mogen nu evengoed i i.p.v. k gebruiken in het linkerlid: $\sup_{i\in I} \sup_{j\in J} a_{ij} \leq \sup_{j\in J} \sup_{i\in I} a_{ij}$.
Via dezelfde redenering krijgen we voor elke $(i,l) \in I \times J$ eerst $a_{il} \leq \sup_{j\in J} a_{ij}$ en vervolgens $\sup_{i\in I} a_{il} \leq \sup_{i\in I} \sup_{j\in J} a_{ij}$. Als we het supremum nemen over $l \in J$, bekomen we $\sup_{l\in J} \sup_{i\in I} a_{il} \leq \sup_{i\in I} \sup_{j\in J} a_{ij}$. We mogen nu evengoed j i.p.v. l gebruiken in het linkerlid: $\sup_{j\in J} \sup_{i\in I} a_{ij} \leq \sup_{i\in I} \sup_{j\in J} a_{ij}$.
Combineren we deze twee tegengestelde ongelijkheden, dan bekomen we de te bewijzen gelijkheid op:
$$\sup_{i\in I} \sup_{j\in J} a_{ij} = \sup_{j\in J} \sup_{i\in I} a_{ij}.$$

2. Het bewijs verloopt geheel analoog als het vorige.

3. Uit de definitie van het infimum volgt dat voor elke $(k,j) \in I \times J$ geldt dat $a_{kj} \geq \inf_{i\in I} a_{ij}$. Nemen we het supremum over $j \in J$, dan verkrijgen we $\sup_{j\in J} a_{kj} \geq \sup_{j\in J} \inf_{i\in I} a_{ij} =: A$, $\forall k \in I$. A is dus een ondergrens voor de verzameling $\{\sup_{j\in J} a_{kj} | k \in I\}$. Aangezien het infimum per definitie de grootste ondergrens is, bekomen we $\inf_{k\in I} \sup_{j\in J} a_{kj} \geq \sup_{j\in J} \inf_{i\in I} a_{ij}$. Na vervanging van k door i is het gestelde bewezen. □

Voorbeeld 5 (Triangulaire normen)
Enkele bekende voorbeelden van (links)continue t-normen zijn het minimum ($T_M(a,b) = \min(a,b)$), het algebraïsche product ($T_P(a,b) = ab$) en de Łukasiewicz t-norm ($T_L(a,b) = \max(0, a+b-1)$). Het minimum is de grootste t-norm en wordt ook de Gödel t-norm genoemd [10]. Met de grootste t-norm bedoelen we dat voor elke $a, b \in [0,1]$ en elke t-norm T geldt dat $T(a,b) \leq \min(a,b)$. We tonen dit aan in eigenschap 3.1.4(1). □

Met het oog op later geven we nog enkele definities van speciale elementen van een t-norm en t-normen met specifieke eigenschappen.

Definitie 3.1.6 (Idempotent element [10])
Zij T een t-norm. Een element a uit het eenheidsinterval is een idempotent element van T indien geldt dat $T(a,a) = a$.

Wegens de randvoorwaarde van een t-norm en eigenschap 3.1.1(2), geldt dat 0 en 1 idempotente elementen zijn van elke triangulaire norm.

Definitie 3.1.7 (Archimedische t-norm [10])
Een continue t-norm T is Archimedisch indien 0 en 1 de enige idempotente elementen van T zijn.

We bewijzen kort enkele eigenschappen van de t-normen uit voorbeeld 5.

Eigenschap 3.1.4 (Eigenschappen van specifieke t-normen)

1. *Het minimum is de grootste t-norm.*

2. *Elk element uit het eenheidsinterval is een idempotent element van de t-norm T $\Leftrightarrow$ T is het minimum.*

3. *Het algebraïsch product is een Archimedische t-norm.*

4. *De Łukasiewicz t-norm is een Archimedische t-norm.*

Bewijs

1. Zij T een willekeurige t-norm. We moeten aantonen dat $T(a,b) \leq \min(a,b)$, $\forall a, b \in [0,1]$. Dit volgt direct uit het feit dat enerzijds $\min(a,b)$ ofwel gelijk is aan a ofwel aan b en anderzijds $T(a,b) \leq T(a,1) = a$ en $T(a,b) \leq T(1,b) = b$ voor elke $a, b \in [0,1]$, waarbij we steunen op het stijgend karakter en de randvoorwaarde van T.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Onderstel dat T een t-norm is met $T(a,a) = a$, $\forall a \in [0,1]$. Zij b en c twee willekeurige elementen uit het eenheidsinterval. Zonder verlies van algemeenheid mogen we onderstellen dat $b \leq c$. We tonen aan dat $T(b,c) = \min(b,c)$. Stel dat $b = c$ dan volgt uit de onderstelling, nl. elk element is idempotent, dat $T(b,c) = T(b,b) = b = \min(b,b)$. Als $b < c$ dan geldt wegens de onderstelling, het stijgend karakter en de randvoorwaarde van een t-norm dat $b = T(b,b) \leq T(b,c) \leq T(b,1) = b$. Bijgevolg geldt dat $T(b,c) = b = \min(b,c)$. Uit de willekeur van b en c volgt dat T het minimum is.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Elk element a uit het eenheidsinterval is een idempotent element van T_M, aangezien $T_M(a,a) = \min(a,a) = a$.

3. T_P is continu. Veronderstel dat a een element uit het eenheidsinterval is. We zien dat voor een idempotent element geldt:
$$T_P(a,a) = a \Leftrightarrow a^2 = a.$$
   De enige oplossingen van de vergelijking $a^2 = a$ zijn 0 en 1. Bijgevolg is T_P Archimedisch.

4. T_L is continu. Veronderstel dat a een element uit het eenheidsinterval is. We zien dat voor een idempotent element geldt:
$$T_L(a,a) = a \Leftrightarrow \max(0, 2a-1) = a.$$
   Een oplossing a van de vergelijking $\max(0, 2a-1) = a$ voldoet aan $2a - 1 = a$ als $0 \leq 2a - 1$ (i.e. $a \geq \frac{1}{2}$) of aan $0 = a$ als $a \leq \frac{1}{2}$. Bijgevolg zijn de enige oplossingen 0 en 1, m.a.w. T_L is Archimedisch. $\square$

Gerelateerd met t-normen zijn de triangulaire conormen, die gebruikt worden om de logische disjunctie uit te breiden.

Definitie 3.1.8 (Triangulaire conorm [16])
Een triangulaire conorm (of kort t-conorm) S is een $[0,1]^2 \to [0,1]$ afbeelding die aan de volgende eigenschappen voldoet, voor alle $a, b, c \in [0,1]$:

- $S(a,b) = S(b,a)$ *(commutativiteit),*
- $S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c))$ *(associativiteit),*
- $a \leq c \Rightarrow S(a,b) \leq S(c,b)$ *(monotoniciteit),*
- $S(a,0) = a$ *(randvoorwaarde).*

Volgende eigenschappen zijn makkelijk uit de definitie af te leiden.

Eigenschap 3.1.5 (Eigenschappen triangulaire conorm [16])
Zij S een t-conorm en $a, b, c, d \in [0, 1]$, dan geldt:

1. $a \leq c$ *en* $b \leq d \Rightarrow S(a, b) \leq S(c, d)$,
2. $S(a, 1) = 1$.

Met een bepaalde t-norm T kan een t-conorm T^* geassocieerd worden op volgende wijze:

$$T^*(a, b) := 1 - T(1 - a, 1 - b), \forall (a, b) \in [0, 1]^2.$$

We noemen T^* de duale t-conorm van T.

Voorbeeld 6 (Triangulaire conormen)
M.b.v. bovenstaande definitie bekomen we voor het minimum $S_M(a, b) = T_M^*(a, b) = \max(a, b)$. Dit is de kleinste t-conorm in de zin dat $\max(a, b) \leq S(a, b)$ voor elke $a, b \in [0, 1]$ en elke t-conorm S. Men gebruikt tevens de naam Gödel t-conorm [10]. De t-conorm S_P corresponderende met het algebraïsch product T_P wordt gegeven door $S_P(a, b) = a + b - ab$ en de Łukasiewicz t-conorm is $S_L(a, b) = \min(1, a + b)$. □

Opmerking 3.1.1
De formule die t-normen en hun duale t-cormen met elkaar linkt, is eigenlijk niets anders dan de vervaging van de logische equivalentie $p \vee q \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$, waarbij voor de negatie gebruikt wordt gemaakt van het complement (zie verderop voorbeeld 9). □

Zoals de naam doet vermoeden, is een implicator de vage uitbreiding van de logische implicatie.

Definitie 3.1.9 (Implicator [14])
Een implicator is een afbeelding $I : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ waarvoor geldt, voor alle $a, b, c, d \in [0, 1]$:

- $a \leq c \Rightarrow I(a, b) \geq I(c, b)$ *(dalende eerste partiële afbeelding),*
- $b \leq d \Rightarrow I(a, b) \leq I(a, d)$ *(stijgende tweede partiële afbeelding),*
- $I(1, 0) = 0, I(0, 0) = I(0, 1) = I(1, 1) = 1$ *(randvoorwaarden).*

Indien een implicator ook voldoet aan de eigenschap $I(1, b) = b, \forall b \in [0, 1]$, noemen we hem een randimplicator.

Duidelijk zorgen de randwaarden ervoor dat de implicator in geval van beperking tot de waarden 0 en 1 overeenstemt met de klassieke implicatie. Volgende eigenschappen van implicatoren volgen direct uit de definitie.

Eigenschap 3.1.6 (Eigenschappen van implicatoren)
Een willekeurige implicator heeft volgende eigenschappen:

1. $I(0, b) = 1, \forall b \in [0, 1]$,
2. $I(a, 1) = 1, \forall a \in [0, 1]$.

Bewijs De eerste eigenschap volgt uit het stijgend zijn van de tweede partiële afbeelding $I(0, .)$ en de randvoorwaarde $I(0, 0) = 1$. Analoog volgt de tweede eigenschap uit het dalend zijn van de eerste partiële afbeelding $I(., 1)$ en de randvoorwaarde $I(1, 1) = 1$. □

We kunnen met elke t-norm T een implicator associëren, genaamd de *residuele implicator*.

Definitie 3.1.10 (Residuele implicator [6])
Zij T een t-norm dan is I_T de residuele implicator gebaseerd op T (ook het residuüm of R-implicator van T genoemd) die gedefinieerd wordt als

$$I_T(a,b) = \sup\{\lambda \in [0,1] | T(a,\lambda) \leq b\}, \forall (a,b) \in [0,1]^2.$$

Voorbeeld 7 (R-implicatoren)
De residuele implicatoren gebaseerd op het minimum (genaamd Gödel implicator), het algebraïsche product en de Łukasiewicz t-norm noteren we respectievelijk met I_M, I_P en I_L met voor alle $(a,b) \in [0,1]^2$ [21]:

$$I_M(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{als } a \leq b \\ b & \text{als } a > b \end{cases}$$

$$I_P(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{als } a \leq b \\ \frac{b}{a} & \text{als } a > b \end{cases}$$

$$I_L(a,b) = \min(1 - a + b, 1)$$

□

Eigenschap 3.1.7
Elke residuele implicator is een randimplicator.

Bewijs Zij T een t-norm en b een willekeurig element uit het eenheidsinterval. Steunend op de randvoorwaarde van een t-norm bekomen we:

$$I_T(1,b) = \sup\{\lambda \in [0,1] | T(1,\lambda) \leq b\} = \sup\{\lambda \in [0,1] | \lambda \leq b\} = b$$

m.a.w. I_T is een randimplicator. □

Tenslotte hebben we nog de vage variant van de negatie, negator genaamd.

Definitie 3.1.11 (Negator [14])
Een negator is een dalende afbeelding $N : [0,1] \to [0,1]$ die voldoet aan

$$N(1) = 0 \text{ en } N(0) = 1.$$

Indien $N(N(a)) = a$, $\forall a \in [0,1]$, spreken we van een involutieve negator.

Duidelijk valt deze definitie samen met de klassieke, logische negatie als we ons beperken tot de waarden 0 en 1.

Het is mogelijk om een negator te associëren met een implicator.

Definitie 3.1.12 (Negator geïnduceerd door implicator [14])
De negator geïnduceerd door een implicator I wordt voor elke $a \in [0,1]$ gedefinieerd als

$$N_I(a) = I(a,0)$$

Indien de implicator I gebaseerd is op de t-norm T, noteren we de geïnduceerde negator als N_T.

Voorbeeld 8 (Negatoren)
De negatoren geïnduceerd door de linkscontinue t-normen minimum, algebraïsch product en Łukasiewicz t-norm noteren we respectievelijk N_M, N_P en N_L met voor elke $a \in [0,1]$:

$$N_M(a) = I_M(a,0) = \begin{cases} 1 & \text{als } a = 0 \\ 0 & \text{als } a > 0 \end{cases}$$

$$N_P(a) = I_P(a,0) = \begin{cases} 1 & \text{als } a = 0 \\ 0 & \text{als } a > 0 \end{cases}$$

$$N_L(a) = I_L(a,0) = \min(1-a,1) = 1-a$$

Merk op dat $N_M = N_P$. □

Eigenschap 3.1.8 (Involutiviteit Łukasiewicz negator)
De Łukasiewicz negator N_L is involutief.

Bewijs Neem een willekeurige $a \in [0,1]$.

$$N_L(N_L(a)) = 1-(1-a) = a.$$ □

In onderstaande tabel vatten we nog eens de 3 bekendste t-normen samen, met bijhorende residuele implicator en negator.

triangulaire norm	residuele implicator	negator
Minimum $T_M(a,b) = \min(a,b)$	Gödel implicator $I_M(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{als } a \leq b \\ b & \text{als } a > b \end{cases}$	Gödel negator $N_M(a) = \begin{cases} 1 & \text{als } a = 0 \\ 0 & \text{als } a > 0 \end{cases}$
Algebraïsch product $T_P(a,b) = ab$	Goguen implicator $I_P(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{als } a \leq b \\ \frac{b}{a} & \text{als } a > b \end{cases}$	Goguen negator $N_P(a) = \begin{cases} 1 & \text{als } a = 0 \\ 0 & \text{als } a > 0 \end{cases}$
Łukasiewicz t-norm $T_L(a,b) = \max(0, a+b-1)$	Łukasiewicz implicator $I_L(a,b) = \min(1-a+b, 1)$	Łukasiewicz negator $N_L(a) = 1-a$

Tabel 3.1: De 3 bekendste t-normen met bijhorende residuele implicator en negator

Vertrekkende van een t-norm T kan m.a.w. op een eenduidige manier een implicator (I_T) en een negator (N_T) vastgelegd worden. Indien de t-norm T linkscontinu is, voldoen deze operatoren aan volgende eigenschappen.

Eigenschap 3.1.9 (Eigenschappen R-implicator en negator geïnd. door t-norm [14, 27])
Zij T een linkscontinue t-norm, dan geldt voor alle $a, b, c \in [0,1]$ en elke familie $(a_j)_{j \in J}$, $(b_j)_{j \in J} \subseteq [0,1]$ met J een indexverzameling:

1. $I_T(a,b) = 1 \Leftrightarrow a \leq b$,
2. $T(a, I_T(a,b)) \leq b$,
3. $I_T(b, \inf_{j \in J} a_j) = \inf_{j \in J} I_T(b, a_j)$,
4. $I_T(\sup_{j \in J} a_j, b) = \inf_{j \in J} I_T(a_j, b)$,
5. $I_T(\inf_{j \in J} a_j, b) \geq \sup_{j \in J} I_T(a_j, b)$,
6. $I_T(\inf_{j \in J} a_j, \sup_{j \in J} b_j) \geq \sup_{j \in J} I_T(a_j, b_j)$,
7. $T(\sup_{j \in J} a_j, \sup_{j \in J} a_j) = \sup_{j \in J} T(a_j, a_j)$,
8. $I_T(a, I_T(b,c)) = I_T(T(a,b), c)$,
9. $I_T(I_T(a,b), b) \geq a$,

10. $I_T(a, T(a, b)) \geq b$,

11. $I_T(a, N_T(b)) = N_T(T(a, b))$,

12. $I_T(a, b) \leq I_T(N_T(b), N_T(a))$,

13. $N_T(N_T(a)) \geq a$,

14. $N_T(\sup_{j \in J} a_j) = \inf_{j \in J} N_T(a_j)$,

15. $I_T(T(a, b), c) \geq T(I_T(a, c), I_T(b, c))$,

16. $T(a, b) \leq c \Leftrightarrow I_T(a, c) \geq b$,

17. $T(I_T(a, b), I_T(b, c)) \leq I_T(a, c)$,

18. $T(T(I_T(a, b), I_T(b, a)), T(I_T(b, c), I_T(c, b))) \leq T(I_T(a, c), I_T(c, a))$,

19. $I_T(a, b) \geq b \geq T(a, b)$,

20. $I_T(I_T(a, I_T(b, c)), I_T(I_T(a, b), T(a, c))) \geq T(a, T(a, a))$.

Bewijs De eerste 14 puntjes zijn overgenomen uit het artikel van Radzikowska et al. [14] en zullen we hier niet bewijzen. De andere eigenschappen hebben we zelf bijgevoegd en tonen we daarom wel aan.

15. Uit het stijgend karakter, de randvoorwaarde en de commutativiteit van T volgt dat $T(a, b) \leq T(a, 1) = a$ en $T(a, b) \leq T(1, b) = b$ voor elke $a, b \in [0, 1]$. Gebruik makend van deze laatste ongelijkheden en het dalend zijn van I_T in het eerste argument bekomen we dat $I_T(T(a, b), c) \geq I_T(a, c)$ en $I_T(T(a, b), c) \geq I_T(b, c)$ of dus dat $I_T(T(a, b), c) \geq \min(I_T(a, c), I_T(b, c))$, $\forall a, b, c \in [0, 1]$. Steunend op het feit dat het minimum de grootste t-norm is (zie eigenschap 3.1.4(1)), kunnen we dit verder afschatten tot $I_T(T(a, b), c) \geq T(I_T(a, c), I_T(b, c))$.

16. $\boxed{\Rightarrow}$ Steunend op het stijgend zijn van I_T in het tweede argument en het tiende puntje, bekomen we:
$$I_T(a, c) \geq I_T(a, T(a, b)) \geq b$$
$\boxed{\Leftarrow}$ Steunend op het stijgend zijn van T en het tweede puntje, bekomen we:
$$T(a, b) \leq T(a, I_T(a, c)) \leq c$$

17. M.b.v. het zestiende puntje zien we dat het gestelde equivalent is met
$$T(a, T(I_T(a, b), I_T(b, c))) \leq c.$$
Aangezien T associatief is, komt dit neer op $T(T(a, I_T(a, b)), I_T(b, c)) \leq c$. Uit het tweede puntje en het stijgend karakter van T volgt dat het linkerlid vergroot kan worden tot $T(b, I_T(b, c))$. Als we nogmaals het tweede puntje toepassen, kunnen we dit vergroten tot c en dat was wat we wouden aantonen.

18. We steunen op eigenschap 3.1.1(4) om het linkerlid om te vormen tot
$$T(T(I_T(a, b), I_T(b, c)), T(I_T(b, a), I_T(c, b)).$$
Aangezien T commutatief is, wordt dit $T(T(I_T(a, b), I_T(b, c)), T(I_T(c, b), I_T(b, a)))$. Uit het vorige puntje en het stijgend karakter van T volgt dan het gestelde.

19. Er geldt
$$I_T(a,b) \geq I_T(1,b) = b = T(1,b) \geq T(a,b),$$
wegens het dalend zijn van I_T in het eerste argument, eigenschap 3.1.7, de randvoorwaarde en het stijgend zijn van T.

20. Wegens de commutativiteit van T is het gestelde gelijk aan
$$I_T(I_T(a, I_T(b,c)), I_T(I_T(a,b), T(a,c))) \geq T(T(a,a),a).$$
Uit zestiende puntje volgt dat $T(a',b') \leq c' \Leftrightarrow I_T(a',c') \geq b'$. Nemen we $a' = T(a,a)$, $b' = a$ en $c' = I_T(I_T(a, I_T(b,c)), I_T(I_T(a,b), T(a,c)))$, dan kunnen we het gestelde verder omvormen tot
$$I_T(T(a,a), I_T(I_T(a, I_T(b,c)), I_T(I_T(a,b), T(a,c)))) \geq a.$$
We zullen het linkerlid afschatten:
$$\begin{aligned}
&I_T(T(a,a), I_T(I_T(a, I_T(b,c)), I_T(I_T(a,b), T(a,c))))\\
&\quad\langle \text{ achtste puntje } \rangle\\
&= I_T(T(T(a,a), I_T(a, I_T(b,c))), I_T(I_T(a,b), T(a,c)))\\
&\quad\langle\ T \text{ associatief } \rangle\\
&= I_T(T(a, T(a, I_T(a, I_T(b,c)))), I_T(I_T(a,b), T(a,c)))
\end{aligned}$$
Wegens het tweede puntje geldt dat $T(a, I_T(a, I_T(b,c))) \leq I_T(b,c)$. Aangezien T stijgend is en I_T dalend in het eerste argument, kunnen we onze afschatting vervolgen:
$$\geq I_T(T(a, I_T(b,c)), I_T(I_T(a,b), T(a,c)))$$
Wegens het achtste puntje geldt $I_T(a', I_T(b',c')) = I_T(T(a',b'),c')$. We kunnen dit toepassen met $a' = T(a, I_T(b,c))$, $b' = I_T(a,b)$ en $c' = T(a,c)$:
$$\begin{aligned}
&= I_T(T(T(a, I_T(b,c)), I_T(a,b)), T(a,c))\\
&\quad\langle\ T \text{ associatief } \rangle\\
&= I_T(T(a, T(I_T(b,c), I_T(a,b))), T(a,c))\\
&\quad\langle\ T \text{ commutatief } \rangle\\
&= I_T(T(a, T(I_T(a,b), I_T(b,c))), T(a,c))
\end{aligned}$$
Wegens het zeventiende puntje geldt dat $T(I_T(a,b), I_T(b,c)) \leq I_T(a,c)$. Combineren we dit met het stijgend zijn van T en het dalend zijn van I_T in eerste argument, dan kunnen we onze afschatting vervolgen:
$$\begin{aligned}
&\geq I_T(T(a, I_T(a,c)), T(a,c))\\
&\quad\langle \text{ tweede puntje: } T(a, I_T(a,c)) \leq c \text{ en } I_T \text{ dalend in eerste argument } \rangle\\
&\geq I_T(c, T(a,c))\\
&\quad\langle\ T \text{ commutatief } \rangle\\
&= I_T(c, T(c,a))\\
&\quad\langle \text{ tiende puntje } \rangle\\
&\geq a
\end{aligned}$$
Dit is precies wat we wouden aantonen. □

Er bestaan echter nog andere implicatoren geassocieerd met een t-norm en een negator, bijvoorbeeld de *S-implicator.*

Definitie 3.1.13 (S-implicator [6])
Zij T een t-norm en N een negator dan is ${I^S}_{T,N}$ de S-implicator gebaseerd op T die gedefinieerd wordt als

$$ {I^S}_{T,N}(a,b) = T^*(N(a),b), \quad \forall (a,b) \in [0,1]^2. $$

Voorbeeld 9 (S-implicatoren)
Enerzijds gebruiken we voor de S-implicatoren in dit voorbeeld de Łukasiewicz negator $N(a) = 1-a, \forall a \in [0,1]$. Naar deze negator wordt ook vaak verwezen met de benaming *complement* of *standaard negator* en we zullen hem daarom noteren als N_s. Anderzijds gebruiken we de t-normen het minimum, het algebraïsche product en de Łukasiewicz t-norm en we noteren de geassocieerde S-implicatoren respectievelijk met ${I^S}_{M,N_s}$, ${I^S}_{P,N_s}$ en ${I^S}_{L,N_s}$. We bekomen voor alle $(a,b) \in [0,1]^2$:

$$ \begin{aligned} {I^S}_{M,N_s}(a,b) &= \max(1-a,b) \\ {I^S}_{P,N_s}(a,b) &= 1-a+ab \\ {I^S}_{L,N_s}(a,b) &= \min(1-a+b,1) \end{aligned} $$

Merk op dat voor deze keuze van negator de R-implicator en de S-implicator geassocieerd met de Łukasiewicz t-norm samenvallen (i.e. $I_L = {I^S}_{L,N_s}$). □

Eigenschap 3.1.10
Elke S-implicator is een randimplicator.

Bewijs Zij T een t-norm, N een negator en b een willekeurig element uit het eenheidsinterval. Steunend op de randvoorwaarde van een negator en een t-conorm bekomen we:

$$ {I^S}_{T,N}(1,b) = T^*(N(1),b) = T^*(0,b) = b $$

m.a.w. ${I^s}_{T,N}$ is een randimplicator. □

Verder introduceren we enkele speciale soorten binaire vaagrelaties. Zij $R \in \mathcal{R}(X)$, dan definiëren we $\mathrm{co}_{N_T}(R)$ als een vaagrelatie op X met voor elke $x, y \in X$ [14]:

$$ \mathrm{co}_{N_T}(R)(x,y) = N_T(R(x,y)). $$

Definitie 3.1.14 (Specifieke binaire vaagrelaties [14])
Zij T een t-norm en N een negator. We noemen een vaagrelatie R op X

- *serieel indien* $\sup_{y \in X} R(x,y) = 1$ *voor elke* $x \in X$,
- *reflexief indien* $R(x,x) = 1$ *voor elke* $x \in X$,
- *zwak reflexief indien* $\sup_{y \in X} R(x,y) = R(x,x)$ *voor elke* $x \in X$,
- *irreflexief indien* $R(x,x) = 0$ *voor elke* $x \in X$,
- *zwak irreflexief indien* $\inf_{y \in X} R(x,y) = R(x,x)$ *voor elke* $x \in X$,
- *symmetrisch indien* $R(x,y) = R(y,x)$ *voor elke* $x, y \in X$,

- *rechts N-asymmetrisch indien $R(x, y) \leq N(R(y, x))$ voor elke $x, y \in X$,*
- *links N-asymmetrisch indien $N(R(x, y)) \leq R(y, x)$ voor elke $x, y \in X$,*
- *T-Euclidisch indien $T(R(z, x), R(z, y)) \leq R(x, y)$ voor elke $x, y, z \in X$,*
- *T-transitief indien $T(R(x, z), R(z, y)) \leq R(x, y)$ voor elke $x, y, z \in X$.*
- *T-cotransitief indien $co_{N_T}(R)$ T-transitief is, met T linkscontinu en $N = N_T$.*

Als R reflexief, symmetrisch en T-transitief is, spreken we van een T-equivalentierelatie.

Bovenstaande definities breiden de gekende scherpe begrippen uit. Merk op dat er meerdere mogelijke definities zijn die bij beperking van de waardeverzameling van de vaagrelatie van $[0, 1]$ tot $\{0, 1\}$ samenvallen met de klassieke definities, wat in het vage geval bijvoorbeeld leidt tot meerdere soorten reflexiviteit. De naamgeving *zwakke reflexiviteit* duidt natuurlijk op het feit dat de hierboven gedefinieerde reflexiviteit zwakke reflexiviteit impliceert maar niet omgekeerd. Vanaf nu zullen we kortweg spreken over een vaagrelatie terwijl we eigenlijk meer specifiek een binaire vaagrelatie bedoelen.

3.2 Ordestructuren

In deze sectie verduidelijken we de naamgevingen van enkele algebraïsche structuren die verderop nog aan bod komen. Om te beginnen voeren we de begrippen in die nodig zijn om te begrijpen wat een tralie is. Verder vermelden we specifieke algebra's die interessant zijn met het oog op later.

Definitie 3.2.1 (Partieel geordende verzameling [16])
Een partieel geordende verzameling (of kort poset) is een koppel $(L, \leq)$ bestaande uit een niet-ledige verzameling L en een binaire relatie $\leq$ op L die reflexief, anti-symmetrisch en transitief is. Dit wil respectievelijk zeggen:

- $\forall x \in L : (x, x)$ *in* $\leq$ *of anders genoteerd* $\forall x \in L : x \leq x$,
- $\forall (x, y) \in L^2$ *met* $x \neq y$: *als* $x \leq y$ *dan* $\neg(y \leq x)$,
- $\forall (x, y, z) \in L^3$: *als* $x \leq y$ *en* $y \leq z$ *dan* $x \leq z$.

De relatie $\leq$ noemen we een partiële orderelatie over L.

Definitie 3.2.2 (Ketting of totaal geordende verzameling [16])
Een ketting is een partieel geordende verzameling $(L, \leq)$ die voldoet aan:

$$\forall (x, y) \in L^2 : x \leq y \text{ of } y \leq x.$$

Definitie 3.2.3 (Supremum en infimum van een poset [16])
Stel $(L, \leq)$ is een poset met $A \subseteq L$ en $b \in L$. We noemen b een bovengrens voor A als en slechts als geldt dat $(\forall a \in A)(a \leq b)$. Analoog noemen we b een ondergrens voor A als en slechts als $(\forall a \in A)(b \leq a)$. De kleinste bovengrens en de grootste ondergrens voor A noemen we respectievelijk het supremum en het infimum van A.

Definitie 3.2.4 (Tralie [16])
Een poset $(L, \leq)$ waarin elk koppel van elementen uit L een supremum en een infimum bezit, noemen we een tralie (in het Engels lattice). Het supremum van $(a, b) \in L^2$ noteren we als $a \vee b$, het infimum als $a \wedge b$.

Definitie 3.2.5 (Complete tralie [19])
Een tralie $(L, \leq)$ is compleet indien elke deelverzameling van L een supremum en een infinum bezit.

Eigenschap 3.2.1 (Tralie-eigenschappen [16])
In een tralie $(L, \leq)$ gelden de volgende fundamentele eigenschappen:

- $\forall a \in L : a \vee a = a$ *en* $a \wedge a = a$ *(idempotentie),*
- $\forall (a, b) \in L^2 : a \vee b = b \vee a$ *en* $a \wedge b = b \wedge a$ *(commutativiteit),*
- $\forall (a, b, c) \in L^3 : a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ *en* $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ *(associativiteit),*
- $\forall (a, b) \in L^2 : a \vee (a \wedge b) = a$ *en* $a \wedge (a \vee b) = a$ *(absorptie).*

Men kan aantonen dat de algebraïsche structuur $(L, \vee, \wedge)$ gedefinieerd door deze eigenschappen precies een tralie is, waarbij het verband tussen $(L, \leq)$ en $(L, \vee, \wedge)$ gegeven wordt door [16]:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a.$$

Definitie 3.2.6 (Residuele tralie [10])
Een residuele tralie is een algebra $(L, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$ met vier binaire operaties en twee constanten zodanig dat:

- $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ *een tralie is met grootste element* 1 *en kleinste element* 0,
- $(L, *, 1)$ *een commutatieve semigroep is met eenheidselement* 1, *i.e.* $*$ *is commutatief en associatief en* $1 * x = x, \forall x \in L$,
- $*$ *en* $\to$ *een toegevoegd paar vormen, d.w.z.* $z \leq (x \to y)$ *als en slechts als* $x * z \leq y$, $\forall (x, y, z) \in L^3$.

Definitie 3.2.7 (**BL**-algebra [10])
Een residuele tralie $(L, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$ is een **BL**-*algebra als en slechts als geldt voor alle $(x, y) \in L^2$:*

- $x \wedge y = x * (x \to y)$,
- $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$.

Merk op dat elke tralie van de vorm $([0, 1], \min, \max, T, I_T, 0, 1)$ met $T \in \mathcal{T}_c$ een **BL**-algebra is [10]. Verderop wordt dit impliciet aangetoond (gevolg van definitie 4.1.1, definitie en eigenschap 4.2.1). We noemen een tralie van deze vorm een t-algebra.

Definitie 3.2.8 (t-algebra [10])
Een t-algebra is een **BL**-*algebra met $L = [0, 1]$, $\wedge$ het minimum, $\vee$ het maximum, $*$ een continue t-norm en $\to$ zijn residuele implicator.*

Een bekende deelklasse van de **BL**-algebra's zijn de **MV**-algebra's.

Definitie 3.2.9 (**MV**-algebra [10])
Een **BL**-*algebra* $(L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$ *waarin voor elke* $x \in L$ *geldt dat* $x = (x \rightarrow 0) \rightarrow 0$ *is een* **MV**-*algebra.*

Merk op dat een t-algebra ook een **MV**-algebra is indien $x = I_T(I_T(x, 0), 0)$, $\forall x \in [0, 1]$. Wegens de definitie van de geïnduceerde negator (zie definitie 3.1.12) is dit equivalent met $x = N_T(N_T(x))$, $\forall x \in [0, 1]$. M.a.w. de t-algebra's die eveneens **MV**-algebra's zijn, hebben een involutieve negator (zie definitie 3.1.11). Uit eigenschap 3.1.8 volgt dat de Łukasiewicz-algebra $([0, 1], \min, \max, T_L, I_L, 0, 1)$ zowel een t-algebra als een **MV**-algebra is.

Hoofdstuk 4

Vaagmodale epistemische logica

4.1 Vaagmodale logica

Er zijn verschillende manieren om modale en epistemische logica's te vervagen. We zullen trachten een kort overzicht te geven van de mogelijkheden (een gelijkaardig overzicht is te vinden bij Esteva en Godo [5]). Daarna zulllen we ons toespitsen op een specifieke methode.

Het ligt voor de hand welke aspecten van de besproken Kripke modellen vervaagd kunnen worden. We hebben enerzijds de toegankelijkheidsrelatie $R \subseteq S \times S$, die eigenlijk een maat is voor de geloofwaardigheid die aan een bepaalde wereld $t \in S$ wordt gehecht vanuit een bepaalde wereld $s \in S$. Tot nu toe hadden we hierin 2 opties: ofwel werd de wereld t als een mogelijke wereld beschouwd vanuit s (m.a.w. $(s,t) \in R$) ofwel niet (m.a.w. $(s,t) \notin R$). Als we er echter voor kiezen om een vage toegankelijkheidsrelatie R te hanteren (m.a.w. $R \in \mathcal{R}(S)$), kan men om het even welke graad van toegankelijkheid aan een wereld hechten. Deze graad $R(s,t)$ is dan een element van het eenheidsinterval waarbij de waarde 1 betekent dat we wereld t als perfect mogelijk beschouwen vanuit wereld s en waarde 0 dat we wereld t als compleet onmogelijk beschouwen vanuit s. Meestal gebruikt men echter geen vaagrelatie maar meer algemener een functie $R : S \times S \to L$, waarbij L een tralie is (zie definitie 3.2.4). Een tralie wordt overigens vaak gebruikt voor de waarheidswaarden in een vaaglocica. Indien we werken met het eenheidsinterval als waardeverzameling van R is de interpretatie van $R(s,t) = 0.5$ dat de wereld t evenveel als mogelijk als als onmogelijk wordt beschouwd vanuit wereld s. We vinden deze eerste vervagingswijze bij verscheidene auteurs terug, maar niet steeds op dezelfde manier. Zo is er enerzijds een methode die in de definities rechtstreeks gebruik maakt van de lidmaatschapsgraden in de vaagrelatie R [4,5,14,19]. Anderzijds wordt er ook gewerkt met meerdere scherpe relaties, geïndexeerd door de elementen van L en gedefinieerd als: $R_a(s,t) = 1$ als en slechts als $R(s,t) \geq a$ (m.a.w. er wordt gewerkt met niveauverzamelingen). Hiermee corresponderend worden dan modale operatoren $[a]$ (met $a \in L$) ingevoerd die men interpreteert m.b.v. de klassieke relaties R_a [5,20,25].

Sommige auteurs werken echter niet met een toegankelijkheidsrelatie op de verzameling van mogelijke werelden, maar kennen aan elke wereld op zich een graad van probabiliteit toe (een gewicht waarbij de som der gewichten van alle werelden 1 is) die dan gebruikt worden om de probabiliteit (of mits aanpassing van definities andere modaliteiten zoals geloof etc.) van formules te evalueren als een gewogen gemiddelde van (eventueel vage) waarheidswaarden per wereld [2, 7, 30]. In dat geval begeeft men zich meer op het terrein van probabilistische logica.

Anderzijds kunnen we de waarheidswaarden van de atomische proposities en hiermee samenhangend de waarheidswaarden van de formules vervagen. Men kan dit op verschillende manieren bekomen. Een eerste manier is het uitbreiden van de mogelijke waarheidswaarden van $\{0, 1\}$ naar een grotere (al dan niet eindige) verzameling L. Een veelvoorkomende keuze is opnieuw een tralie (al dan niet met speciale eigenschappen). De meest natuurlijke keuze voor L is (elementen uit) het eenheidsinterval, waarbij 0 (helemaal niet waar) en 1 (helemaal waar) de extreme waarden zijn. Deze eerste aanpak wordt onder andere gebruikt in [4, 5, 7, 10, 11, 14, 20, 30, 34]. Een andere manier bestaat erin de waarheidswaarden scherp te houden (0 en 1), maar meerdere modale operatoren te gebruiken die elk corresponderen met een zekere gradatie van plausibileit. Zo gebruikt Mironov [19] de elementen van een tralie om de modale taal uit te breiden (merk op dat ook 0 en 1 formules zijn in het scherpe geval, nl. de logische constanten, meestal genoteerd als $\bar{0}$ en $\bar{1}$) en de modale operatoren te indexeren.

Bij sommige auteurs vinden we een combinatie van een vage toegankelijkheidsrelatie en vage waarheidswaarden terug [4, 14, 19, 20]. Godo en Esteva [5] merken hierbij op dat de verschillende benaderingswijzen niet noodzakelijk equivalent zijn.

In dit werk zullen we gebruik maken van een vaag Kripke model, in die zin dat zowel de toegankelijkheidsrelatie als de waarheidswaarden vaag zijn. Zoals reeds gezegd is het een natuurlijke keuze om de vage waarden uit (een deelverzameling van) het eenheidsinterval te nemen. Vooreerst is het nodig om een vaagmodale taal vast te leggen. We baseren ons hiervoor op Hájeks benadering [10]. Dit impliceert onder andere dat we met 1 modale operator $\Box$ (en zijn duale $\Diamond$) en vage waarheidswaarden zullen werken. Zij A een niet-ledige, aftelbare verzameling van atomische proposities. We noteren de modale taal geassocieerd met A als L_A. De verzameling van logische connectoren is $\{\neg, \&, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, die respectievelijk corresponderen met de negatie, twee verschillende conjuncties (zie verder opmerking 4.1.1(1)), disjunctie, implicatie en equivalentie. De formules van deze vaagmodale taal L_A kunnen dan recursief gedefinieerd worden:

- Als φ is een formule in L_A dan is $\Box\varphi$ een formule in L_A.
- De logische constanten $\bar{c}, \forall c \in [0, 1]$, zijn formules in L_A.
- De propositionele variabelen $p \in A$ zijn formules in L_A.
- Als φ, ψ formules zijn in L_A dan zijn $\neg\varphi$, $\varphi\&\psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ en $\varphi \leftrightarrow \psi$ formules in L_A.

Een formule die geen atomische propositie bevat, noemen we een constante formule. Een functie π die elke atomische propositie afbeeldt op een element uit het eenheidsinterval is een waarheidsfunctie of interpretatie (zie definitie 3.1.3). Zij $p \in A$ en $c \in [0, 1]$, dan zeggen we dat p in mate c waar is als $\pi(p) = c$ (waarbij $c = 1$ overeenkomt met helemaal waar en $c = 0$ met helemaal niet waar). De logische constante $\bar{c}$ heeft voor elke interpretatie waarheidswaarde c ($c \in [0, 1]$). Indien we een logische connector, die op n formules $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in L_A$ inwerkt, noteren als een functie $f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ kan een interpretatie π op A recursief uitgebreid worden naar L_A op volgende wijze:

$$\pi(f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)) = \mathbf{f}(\pi(\varphi_1), \pi(\varphi_2), \ldots, \pi(\varphi_n))$$

met $\mathbf{f}$ een $[0,1]^n \to [0,1]$-afbeelding geassocieerd met de connector f. Verderop verduidelijken we welke afbeeldingen we associëren met de connectoren $\neg, \&, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ en K. In het scherpe geval hebben we eerst afbeeldingen geassocieerd met de connectoren $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ om vervolgens a.d.h.v. verbanden tussen deze afbeeldingen definities voor de connectoren $\neg, \wedge, \vee$ en $\leftrightarrow$ te bekomen op basis van de connector $\to$. Hier vertrekken we echter van de definities voor de connectoren $\neg, \wedge, \vee$ en $\leftrightarrow$ op basis van de connectoren $\&$ en $\to$ en zullen deze gebruiken om de geassocieerde afbeeldingen van de connectoren $\neg, \wedge, \vee$ en $\leftrightarrow$ af te leiden uit de afbeeldingen bij de connectoren $\&$ en $\to$ (zie eigenschap 4.2.1 verderop).

Definitie 4.1.1 (Logische connectoren en logische constante)
Vertrekkende van de logische connectoren $\&$ en $\to$ en de waarheidsconstante $\bar{0}$ (met beeld nul voor elke waarheidsfunctie) kunnen de logische connectoren $\neg, \wedge, \vee$ en $\leftrightarrow$ gedefinieerd worden als

$$\begin{aligned}
\neg\varphi &\equiv \varphi \to \bar{0} \\
\varphi \wedge \psi &\equiv \varphi \& (\varphi \to \psi) \\
\varphi \vee \psi &\equiv ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi) \\
\varphi \leftrightarrow \psi &\equiv (\varphi \to \psi) \& (\psi \to \varphi)
\end{aligned}$$

waarbij φ en ψ formules zijn uit de vaagmodale taal L_A. De logische constante $\bar{1}$ kunnen we definiëren als $\bar{0} \to \bar{0}$.

Opmerking 4.1.1

- Er wordt hier een onderscheid gemaakt tussen de logische connectoren $\&$ en $\wedge$, die beide een vage vertaling van conjunctie zijn. In het scherpe geval was daar geen sprake van maar men verifieert gemakkelijk dat deze definities twee verschillende uitbreidingen zijn van de scherpe logische connector voor de conjunctie, indien de conjunctie $\&$ m.b.v. een t-norm T en de implicatie m.b.v. een implicator I gedefinieerd worden, met φ en $\psi \in L_A$:

  - $\pi(\varphi \& \psi) = T(\pi(\varphi), \pi(\psi))$,
  - $\pi(\varphi \to \psi) = I(\pi(\varphi), \pi(\psi))$,

  We gaan dit na in waarheidstabellen waarbij we steunen op de randvoorwaarde van de t-norm (zie definitie 3.1.4), eigenschap 3.1.9(2), de randvoorwaarden van de implicator (zie definitie 3.1.9) en deze van de negator (zie definitie 3.1.11).

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\varphi \& (\varphi \to \psi)$	$\varphi \& \psi$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

  Op het eerste zicht lijkt het vreemd dat er twee conjuncties zijn, maar uit analyse van hoe vage waarheidswaarden gemodelleerd zouden moeten worden, heeft Goguen sterke argumenten gehaald die voor twee conjuncties pleiten [8] (zo zou er een conceptueel verschil zijn tussen de gewone conjunctie die twee formules combineert en de conjunctie die veronderstelling combineert d.m.v. modus ponens).

Ook de ogenschijnlijk ingewikkelde definitie van de disjunctie komt overeen met de standaard logische connector *of* in het scherpe geval.

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$(\varphi \to \psi) \to \psi$	$\psi \to \varphi$	$(\psi \to \varphi) \to \varphi$	$\varphi \vee \psi$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0

De vage connectoren negatie en equivalentie zijn ook uitbreidingen van de overeenkomstige scherpe connectoren aangezien ze op dezelfde manier gedefinieerd zijn als in het scherpe geval.

- Indien we de modale operatoren uit de vaaglogische taal achterwege laten, dan kan men algebra's (zie definities 3.2.7, 3.2.8 en 3.2.9) beschouwen als semantische modelstructuren van deze vaaglogische syntax. De algebra $(L, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$ bepaalt dan interpretaties waarvan de waarheidswaarden behoren tot L (0 en 1 zijn respectievelijk de kleinste en grootste waarde, 0 is de interpretatie van de logische constante $\bar{0}$). De implicatie $\to$ wordt geïnterpreteerd m.b.v. de binaire operator $\to$ en de conjunctie & m.b.v. de binaire operator $*$. Wegens definitie 4.1.1 kan elke formule nu geïnterpreteerd worden in deze algebra. Verderop in eigenschap 4.2.1 zal duidelijk worden dat de conjunctie $\wedge$ en de disjunctie $\vee$ respectievelijk precies geïnterpreteerd worden m.b.v. de binaire operatoren $\wedge$ en $\vee$ uit de algebra. □

4.2 Vaagmodale epistemische logica

We zouden graag een manier vinden om te bepalen in welke mate we weten dat iets voldaan is. In de literatuur zijn er echter meerdere benaderingen om een graad van kennis aan een formule toe te kennen. Enerzijds is er de reeds gekende manier m.b.v. modale operatoren (waarbij we de kennisoperator opnieuw als K kunnen noteren) die de mogelijke waarheidswaarden uitbreidt tot L [32]. We krijgen dan een vaag Kripke model. Andere auteurs hanteren voor de modaliteit geloof een Dempster-Shafer geloofsfunctie [2,5], maar dit is echter niet hetzelfde! Een geloofsfunctie bepaalt de mate waarin men gelooft dat een formule φ waar is, terwijl de waarheidswaarde van $B\varphi$ wijst op het geloof van de mate waarin φ voldaan is.

Definitie 4.2.1 (Vaag Kripke model)
Zij A een niet-ledige, aftelbare verzameling van atomische proposities. Een vaag Kripke model is een structuur M van de vorm $\langle S, \pi, R, T, I \rangle$, met

- *S een niet-ledige verzameling (de verzameling van mogelijke werelden),*
- *$\pi : S \to (A \to [0,1])$ een functie die elke mogelijke wereld afbeeldt op een interpretatie, dit is een functie die elk atoom afbeeldt op een waarheidswaarde tussen 0 en 1 (met 0 helemaal niet waar en 1 helemaal waar),*

- *$R \in \mathcal{R}(S)$ een vage toegankelijkheidsrelatie,*
- *T een continue triangulaire norm en*
- *I een randimplicator.*

Indien $I = I_T$ noteren we kort $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$.

Bijkomend wordt er voor alle $s, t \in S$, zoals in het klassieke geval, verondersteld dat $\pi(s) \neq \pi(t)$ als $s \neq t$. Het zou namelijk niet zinvol zijn om identieke werelden in het model op te nemen. De verzameling van alle mogelijke vage Kripke modellen zullen we voortaan noteren als $\mathcal{M}$.

Definitie 4.2.2 (Vage modellering atomen, negatie, conjunctie, disjunctie, implicatie, equivalentie, kennisoperator)
De waarheidswaarde van een atomische propositie $p \in A$ in een wereld $s \in S$ van een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T, I \rangle$ noteren we als $[p]_{M,s}$ met

$$[p]_{M,s} = \pi(s)(p).$$

Dit is de mate waarin de atomische propositie p voldaan is in de wereld s. Aangezien elementen uit het eenheidsinterval nu ook deel uitmaken van de modale taal L_A, definiëren we de waarheidswaarde voor een willekeurige logische constante $\bar{c}$ met $c \in [0,1]$ als

$$[\bar{c}]_{M,s} = c.$$

Met deze basis definiëren we recursief $[\varphi \& \psi]_{M,s}$ en $[\varphi \rightarrow \psi]_{M,s}$:

- $[\varphi \& \psi]_{M,s} = T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})$,
- $[\varphi \rightarrow \psi]_{M,s} = I([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})$,

waarbij φ en ψ formules zijn uit de vaagmodale taal. De mate waarin een formule $K\varphi$ (met $\varphi \in L_A$) voldaan is in een Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T, I \rangle$ en een wereld $s \in S$, noteren we als $[K\varphi]_{M,s}$ met [14]

$$[K\varphi]_{M,s} = \inf_{t \in S} I(R(s,t), [\varphi]_{M,t}).$$

Voor de duale kennisoperator $\bar{K}$ is de waarheidswaarde in wereld s als volgt gedefinieerd [14]:

$$[\bar{K}\varphi]_{M,s} = \sup_{t \in S} T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}).$$

Indien $[\varphi]_{M,s} = 1$ voor een formule φ, noteren we dit, naar analogie met het scherpe geval, als $(M, s) \models \varphi$.

Ter vergelijking vermelden we ook nog de definitie van het vaag Kripke model uit [10]. Als we verderop spreken over een vaag Kripke model zonder expliciet te vermelden welk, bedoelen we het model uit definitie 4.2.1.

Definitie 4.2.3 (Vaag Kripke model volgens Hájek [10])
Kiezen we in ons vaag Kripke model (definitie 4.2.1) de scherpe toegankelijkheidsrelatie $R(s,s) = 1, \forall s \in S$ *of dus* $R = S \times S$ *en modelleren we de conjunctie & met een continue t-norm en de implicatie* $\to$ *met de bijhorende residuele implicator, dan bekomen we het vaag Kripke model uit [10]. De modellering van de atomen, de negatie, de zwakke conjunctie, de disjunctie en de equivalentie is zoals in definitie 4.2.2. De modellering van de kennisoperator en zijn duale is als volgt voor een formule* φ*:*

$$[K\varphi]_{M,s} = \inf_{t\in S}[\varphi]_{M,t} \text{ en } [\bar{K}\varphi]_{M,s} = \sup_{t\in S}[\varphi]_{M,t}.$$

Opmerking 4.2.1
Door in definitie 4.2.1 van het vaag Kripke model een randimplicator I te kiezen en doordat voor elke implicator geldt dat $I(0,b) = 1$ voor alle $b \in [0,1]$ (zie eigenschap 3.1.6(1)), kan de waarheidswaarde van $K\varphi$ in een model M en wereld s in het geval van een scherpe toegankelijkheidsrelatie R vereenvoudigd worden tot:

$$[K\varphi]_{M,s} = \inf_{t\in S} I(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) = \inf\{[\varphi]_{M,t} | (s,t) \in R\}.$$

In het bijzonder geval dat $R = S \times S$ wordt gebruikt, kan dit nog vereenvoudigd worden:

$$[K\varphi]_{M,s} = \inf\{[\varphi]_{M,t} | (s,t) \in R\} = \inf_{t\in S}[\varphi]_{M,t}.$$

m.a.w. definitie 4.2.1 is een uitbreiding van definitie 4.2.3. Definitie 4.2.1 is eveneens een uitbreiding van de scherpe definitie. Onderstel dat de waarheidswaarden van formules enkel 0 of 1 kunnen zijn dat en de relatie R scherp is. In dat geval bekomen we:

$$[K\varphi]_{M,s} = \inf\{[\varphi]_{M,t} | (s,t) \in R\} = 1 \text{ als en slechts als } [\varphi]_{M,t} = 1, \forall t \in S : (s,t) \in R.$$

Dit valt duidelijk samen met de definitie 2.2.1 van het scherp Kripke model aangezien $[\varphi]_{M,t} = 1$ inhoudt dat $(M,t) \models \varphi$. Ook voor de duale kennisoperator $\bar{K}$ kunnen we nagaan dat definitie 4.2.1 samenvalt met definitie 4.2.3 en het klassieke geval. Gebruik makend van het feit dat $T(1,a) = a$ en $T(0,a) = 0$ voor elke $a \in [0,1]$, kan definitie 4.2.1 herleid worden tot volgende uitdrukking voor scherpe R:

$$[\bar{K}\varphi]_{M,s} = \sup_{t\in S} T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) = \sup_{t\in S}\{[\varphi]_{M,t} | (s,t) \in R\}.$$

Wanneer men zoals in definitie 4.2.3 de toegankelijkheidsrelatie $R = S\times S$ hanteert, wordt dit

$$[\bar{K}\varphi]_{M,s} = \sup_{t\in S}\{[\varphi]_{M,t} | (s,t) \in R\} = \sup_{t\in S}[\varphi]_{M,t},$$

wat ook precies definitie 4.2.3 is. Als we definitie 4.2.1 verder omvormen voor een scherpe toegankelijkheidsrelatie R en scherpe waarheidswaarden, bekomen we

$$[\bar{K}\varphi]_{M,s} = \sup\{[\varphi]_{M,t} | (s,t) \in R\} = 1 \text{ als en slechts als } \exists t \in R : (s,t) \in R \text{ en } [\varphi]_{M,t} = 1.$$

Dit is precies hetzelfde als bij het scherpe Kripke model (zie eigenschap 2.2.1). □

Eigenschap 4.2.1 (Waarheidswaarden negatie, conjunctie [10], disjunctie [10] en equivalentie)
Als T *een continue t-norm is, geldt in* $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ *voor elke* $\varphi, \psi \in L_A$ *en* $s \in S$*:*

1. $[\neg\varphi]_{M,s} = N_T([\varphi]_{M,s})$,

2. $[\varphi \wedge \psi]_{M,s} = \min([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})$,

3. $[\varphi \vee \psi]_{M,s} = \max([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})$,

4. $[\varphi \leftrightarrow \psi]_{M,s} = T(I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}), I_T([\psi]_{M,s}, [\varphi]_{M,s}))$.

Bewijs Stel dat $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ een vaag Kripke model is met $T \in \mathcal{T}_c$. We nemen willekeurige formules φ en ψ en een arbitraire wereld $s \in S$. Gebruik makend van de voorgaande definities bekomen we:

1. $[\neg\varphi]_{M,s} = [\varphi \to \bar{0}]_{M,s} = I_T([\varphi]_{M,s}, [\bar{0}]_{M,s}) = I_T([\varphi]_{M,s}, 0) = N_T([\varphi]_{M,s})$
2. We baseren ons voor dit bewijs op [10], maar werken het meer in detail uit. We vormen het linkerlid om:

   $$[\varphi \wedge \psi]_{M,s} = [\varphi \& (\varphi \to \psi)]_{M,s} = T([\varphi]_{M,s}, [\varphi \to \psi]_{M,s}) = T([\varphi]_{M,s}, I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})).$$

   We onderscheiden 2 gevallen:

   $\boxed{[\varphi]_{M,s} \leq [\psi]_{M,s}}$

   Steunend op eigenschap 3.1.9(1) bekomen we:

   $$I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}) = 1.$$

   M.b.v. de randvoorwaarde van T bekomen we het gestelde:

   $$T([\varphi]_{M,s}, I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})) = T([\varphi]_{M,s}, 1) = [\varphi]_{M,s} = \min([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})$$

   $\boxed{[\varphi]_{M,s} \geq [\psi]_{M,s}}$

   Wegens de continuïteit en de randvoorwaarde van T en eigenschap 3.1.1(2) is de functie $f(x) := T([\varphi]_{M,s}, x)$ continu met $f(0) = 0$ en $f(1) = [\varphi]_{M,s}$. De tussenwaardestelling leert ons:

   $$\exists x' \in [0,1] : f(x') = [\psi]_{M,s} \text{ aangezien } [\psi]_{M,s} \in [0, [\varphi]_{M,s}]$$

   We noteren de verzameling van elementen uit het eenheidsinterval die hieraan voldaan als X, m.a.w. $X = \{x \in [0,1] | f(x) = [\psi]_{M,s}\}$. Aangezien f continu en stijgend is (t.g.v. het stijgend zijn van T in beide argumenten), is X een nietledig deelinterval van het eenheidsinterval. Per definitie van de functie f geldt $[\psi]_{M,s} = f(x) = T([\varphi]_{M,s}, x)$, $\forall x \in X$. Gebruik makend van de definitie van de residuele implicator, de definitie en het stijgend karakter van de functie f, het feit dat deze de waarde $[\psi]_{M,s}$ bereikt en de definitie van het supremum, zien we dat

   $$\begin{aligned} I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}) &= \sup\{\lambda \in [0,1] | T([\varphi]_{M,s}, \lambda) \leq [\psi]_{M,s}\} \\ &= \sup\{\lambda \in [0,1] | f(\lambda) \leq [\psi]_{M,s}\} = \sup\{\lambda \in [0,1] | f(\lambda) = [\psi]_{M,s}\} \\ &= \sup_{x \in X} x \end{aligned} \tag{4.1}$$

Aangezien $T([\varphi]_{M,s}, x) = [\psi]_{M,s}$, $\forall x \in X$, en $[\psi]_{M,s}$ onafhankelijk is van x, bekomen we enerzijds door het supremum te nemen dat

$$\sup_{x\in X} T([\varphi]_{M,s}, x) = \sup_{x\in X} [\psi]_{M,s} = [\psi]_{M,s}$$

Anderzijds hebben we ondersteld dat T continu is, dus wegens eigenschap 3.1.2(1) geldt

$$\sup_{x\in X} T([\varphi]_{M,s}, x) = T([\varphi]_{M,s}, \sup_{x\in X} x)$$

We kunnen deze twee zaken combineren tot $T([\varphi]_{M,s}, \sup_{x\in X} x) = [\psi]_{M,s}$. Samen met (4.1) leidt dit tot het gestelde:

$$T([\varphi]_{M,s}, I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})) = T([\varphi]_{M,s}, \sup_{x\in X} x) = [\psi]_{M,s} = \min([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})$$

3. We baseren ons ook hier op [10]. We vormen eerst het linkerlid om m.b.v. de definities van de modellering en het voorgaande puntje:

$$\begin{aligned}[\varphi \vee \psi]_{M,s} &= [((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)]_{M,s} \\ &= \min(I_T(I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}), [\psi]_{M,s}), I_T(I_T([\psi]_{M,s}, [\varphi]_{M,s}), [\varphi]_{M,s}))\end{aligned}$$

We onderscheiden opnieuw 2 gevallen:

$\boxed{[\varphi]_{M,s} \leq [\psi]_{M,s}}$

Enerzijds volgt uit eigenschap 3.1.9(1):

$$I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}) = 1$$

Aangezien I_T een randimplicator is (zie eigenschap 3.1.7), volgt:

$$I_T(I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}), [\psi]_{M,s}) = I_T(1, [\psi]_{M,s}) = [\psi]_{M,s} \tag{4.2}$$

Anderzijds maken we gebruik van eigenschap 3.1.9(2):

$$T([\psi]_{M,s}, I_T([\psi]_{M,s}, [\varphi]_{M,s})) \leq [\varphi]_{M,s}$$

Combineren we dit met de definitie van de residuele implicator en de commutativiteit van T, dan bekomen we:

$$\begin{aligned}I_T(I_T([\psi]_{M,s},[\varphi]_{M,s}), [\varphi]_{M,s}) &= \sup\{\lambda \in [0,1] | T(I_T([\psi]_{M,s}, [\varphi]_{M,s}), \lambda) \leq [\varphi]_{M,s}\} \\ &= \sup\{\lambda \in [0,1] | T(\lambda, I_T([\psi]_{M,s}, [\varphi]_{M,s})) \leq [\varphi]_{M,s}\} \geq [\psi]_{M,s}\end{aligned}$$

Samen met (4.2) leidt dit tot:

$$\begin{aligned}\min(I_T(I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}), [\psi]_{M,s}), I_T(I_T([\psi]_{M,s}, [\varphi]_{M,s}), [\varphi]_{M,s})) &= [\psi]_{M,s} \\ &= \max([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})\end{aligned}$$

$\boxed{[\varphi]_{M,s} \geq [\psi]_{M,s}}$

Aangezien het gestelde symmetrisch is in $[\varphi]_{M,s}$ en $[\psi]_{M,s}$ t.g.v. de commutativiteit van het minimum en het maximum, kunnen we dit op analoge wijze aantonen met de rollen van $[\varphi]_{M,s}$ en $[\psi]_{M,s}$ omgewisseld.

4. Dit volgt rechtstreeks uit de definitie van de equivalentie en de modellering van de implicatie en de conjunctie &:
$[\varphi \leftrightarrow \psi]_{M,s} = [(\varphi \to \psi)\&(\varphi \to \psi)]_{M,s} = T(I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}), I_T([\psi]_{M,s}, [\varphi]_{M,s}))$

Het gestelde volgt uit het arbitrair zijn van φ, ψ en s. □

Aangezien het bewijs van eigenschap 4.2.1(1,4) duidelijk ook geldig is voor een willekeurige implicator en zijn geïnduceerde negator, gelden deze uitdrukkingen eveneens voor een willekeurig vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T, I\rangle$.

Opmerking 4.2.2

1. De waarheidswaarde van de conjunctie $\varphi\&\psi$ van de formules φ en ψ wordt dus berekend m.b.v. de t-norm van de waarheidswaarden van de formules, terwijl die van de conjunctie $\varphi \wedge \psi$ met onze definities m.b.v. het minumum, de grootste t-norm (zie eigenschap 3.1.4(1)), berekend wordt. Aangezien de laatste waarheidswaarde dus steeds groter zal zijn dan de eerste, verwijzen we naar & met de benaming *sterke conjunctie* en naar $\wedge$ met *zwakke conjunctie* [10].

2. Stel dat $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ een vaag Kripke model is en $s \in S$. Twee formules φ en ψ zijn perfect equivalent in de wereld s (i.e. $[\varphi \leftrightarrow \psi]_{M,s} = 1$) indien ze dezelfde waarheidswaarde hebben in deze wereld. We kunnen de waarheidswaarde van de equivalentie wegens eigenschap 4.2.1(4) immers omvormen tot

$$T(I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}), I_T([\psi]_{M,s}, [\varphi]_{M,s})).$$

   Uit eigenschap 3.1.1(3) volgt dat dit enkel waarde 1 kan hebben indien

$$I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}) = I_T([\psi]_{M,s}, [\varphi]_{M,s}) = 1.$$

   Wegens eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[\varphi]_{M,s} \leq [\psi]_{M,s}$ en $[\varphi]_{M,s} \geq [\psi]_{M,s}$, m.a.w. $[\varphi]_{M,s} = [\psi]_{M,s}$. □

We hebben de waarheidswaarde voor een formule van de vorm $\bar{K}\varphi$ gedefinieerd (zie definitie 4.2.2). In het scherpe geval daarentegen viel deze te berekenen als de waarheidswaarde van $\neg K \neg\varphi$ aangezien de duale operator $\bar{K}$ gedefinieerd was als $\bar{K}\varphi = \neg K \neg \varphi$ voor elke formule φ (zie eigenschap 2.2.1). In het vaag Kripke model blijkt deze dualiteit tussen de modale operatoren K en $\bar{K}$ (soms ook als $\Box$ en $\Diamond$ genoteerd) niet meer te gelden, zoals zal blijken uit onderstaand voorbeeld.

Voorbeeld 10
Veronderstel $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met:

- $A = \{p\}$,
- $S = \{s, t\}$,
-

$\pi(.)(.)$	s	t
p	0.5	0.9

,

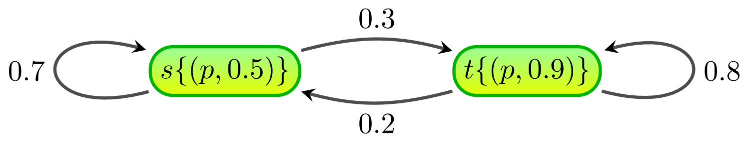
-

$R(.,.)$	s	t
s	0.7	0.3
t	0.2	0.8

, waarbij het eerste argument in R uit de rijen komt,

- $T = T_P$.

Visueel kunnen we deze informatie samenvatten m.b.v. onderstaand schema. Het feit dat t in de mate 0.3 toegankelijk is vanuit s wordt weergegeven met een pijl van wereld s naar wereld t waarbij de waarde $R(s,t)$ vermeld wordt. In accolades worden de waarheidswaarden van de atomische propositie p weergegeven. Als we bijvoorbeeld wereld s bekijken, is p in de mate 0.5 waar.



We kunnen nu volgende berekeningen uitvoeren:

$$[\bar{K}p]_{M,s} = \sup_{t \in S} T(R(s,t), [p]_{M,t}) = \max(T(0.7, 0.5), T(0.3, 0.9)) = \max(0.35, 0.27) = 0.35$$

Anderzijds bekomen we:

$$\begin{aligned} [\neg K \neg p]_{M,s} &= N_P(\inf_{t \in S} I_P(R(s,t), N_P([p]_{M,t}))) = N_P(\min(I_P(0.7, 0), I_P(0.3, 0))) \\ &= N_P(\min(0, 0)) = N_P(0) = 1 \end{aligned}$$

Deze twee waarheidswaarden zijn duidelijk niet gelijk, i.e. $[\bar{K}p]_{M,s} \neq [\neg K \neg p]_{M,s}$. $\square$

Volgende eigenschap toont aan dat er in het vage geval wel degelijk nog een verband is tussen de operatoren K en $\bar{K}$, zij het zwakker dan de identiteit uit het scherpe geval.

Eigenschap 4.2.2 (Waarheidswaarde duale kennisoperator)
Als T een continue t-norm is, dan geldt in $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ voor elke $\varphi \in L_A$ en $s \in S$:

$$[\neg K \neg \varphi]_{M,s} \geq [\bar{K}\varphi]_{M,s}.$$

Bewijs Zij $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ een vaag Kripke model met $T \in \mathcal{T}_c$, s een willekeurige wereld in S en φ een willekeurige formule. M.b.v. eigenschap 4.2.1(1) bekomen we:

$$\begin{aligned} [\neg K \neg \varphi]_{M,s} &= N_T([K \neg \varphi]_{M,s}) \\ &\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\ &= N_T(\inf_{t \in S} I_T(R(s,t), [\neg \varphi]_{M,t})) \\ &\quad \langle \text{ eigenschap 4.2.1(1) } \rangle \\ &= N_T(\inf_{t \in S} I_T(R(s,t), N_T([\varphi]_{M,t}))) \\ &\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(11) } \rangle \\ &= N_T(\inf_{t \in S} N_T(T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}))) \\ &\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(14) } \rangle \\ &= N_T(N_T(\sup_{t \in S} T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}))) \\ &\quad \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \end{aligned}$$

$$= N_T(N_T([\bar{K}\varphi]_{M,s}))$$
$$\langle \text{ eigenschap 3.1.9(13) } \rangle$$
$$\geq [\bar{K}\varphi]_{M,s}$$

Het gestelde volgt uit het arbitrair zijn van s en φ. □

Opmerking 4.2.3
Uit het bewijs van eigenschap 4.2.2 volgt direct dat de gelijkheid geldt voor T een continue t-norm met involutieve negator N_T (i.e. een negator waarvoor $N_T(N_T(a)) = a$, $\forall a \in [0,1]$), m.a.w. in $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met N_T involutief geldt voor $\varphi \in L_A$ en $s \in S$:

$$[\neg K \neg\varphi]_{M,s} = [\bar{K}\varphi]_{M,s}.$$

In dit geval kan men de duale kennisoperator op dezelfde wijze als in het scherpe geval definiëren a.d.h.v. de kennisoperator. □

Definitie 4.2.4 (Modellering)
De waarheidswaarde van een formule $\varphi \in L_A$ in een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ wordt genoteerd en gedefinieerd als:

$$[\varphi]_M = \inf_{s\in S} [\varphi]_{M,s}.$$

De waarheidswaarde van een formule $\varphi \in L_A$ wordt genoteerd en gedefinieerd als

$$[\varphi] = \inf_{M\in\mathcal{M}} [\varphi]_M.$$

Indien $[\varphi]_M$ of $[\varphi]$ gelijk is aan 1, noteren we dit respectievelijk als $M \models \varphi$ en $\models \varphi$ (zoals in het scherpe geval). Dit geldt resp. indien $\forall s \in S : [\varphi]_{M,s} = 1$ en $\forall M \in \mathcal{M} : [\varphi]_M = 1$. In het laatste geval spreken we over een $\mathcal{M}$-tautologie of kortweg tautologie.

Opmerking 4.2.4 (Gerelateerd werk)
In sommige vormen van vaagmodale autoepistemische logica gebruikt men een model dat nauw verwant is met het vaag Kripke model. Zo maken Blondeel, Schockaert, De Cock en Vermeir voor hun werk over *fuzzy answer set programming* [31] gebruik van een model waarbij voor de interpretatie van formules in een wereld I (dit is een vaagverzameling van de atomische proposities) een verzameling werelden S wordt gehanteerd. Men eist echter niet dat de wereld I tot de verzameling S behoort, maar het wordt ook niet uitgesloten. Er geldt m.a.w. dat $I \in \mathcal{F}(A)$ en $S \subseteq \mathcal{F}(A)$. Hun vaaglogische taal is dezelfde als de onze, nl. L_A maar met de logische constanten uit $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Vervolgens definieert men de waarheidswaarden van de elementen uit de vaaglogische taal L_A als volgt:

1. Voor atomische proposities p: $[p]_{(I,S)} = I(p)$.
2. Voor constanten c: $[c]_{(I,S)} = c$.
3. Voor een formule α: $[B\alpha]_{(I,S)} = \inf_{J\in S}[\alpha]_{J,S}$.
4. Voor formules α_i ($1 \leq i \leq n$) en $f \in F_n$ ($n \in \mathbb{N}$) geïnterpreteerd met behulp van $\mathtt{f} : [0,1]^n \to [0,1]$: $[f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]_{(I,S)} = \mathtt{f}([\alpha_1]_{(I,S)}, \ldots, [\alpha_n]_{(I,S)})$.

F_n stelt hier de verzameling van n-aire connectieven voor, i.e. een connector die n formules verbindt (de negatie is bijvoorbeeld 1-air of unair omdat deze inwerkt op 1 formule). Men specifieert deze connectieven niet, maar een voorbeeld zou kunnen zijn: $f = \neg \in F_1$ en $\mathtt{f} = N$ met N een negator. Dan bekomt men $[f(\varphi)]_{I,S)} = [\neg\varphi]_{(I,S)} = \mathtt{f}([\varphi]_{(I,S)}) = N([\varphi]_{(I,S)})$, wat overeenstemt met de uitdrukking in dit werk (zie eigenschap 4.2.1(4)). Indien men zich hier zou beperken tot de connectieven $f_1 = \neg \in F_1$, $f_2 = \& \in F_2$, $f_3 = \wedge \in F_2$, $f_4 = \vee \in F_2$, $f_5 = \rightarrow \in F_2$ en $f_6 = \leftrightarrow \in F_2$ en de corresponderende afbeeldingen $\mathtt{f_1} = N_T$ met N_T een negator geïnduceerd door de continue t-norm T, $\mathtt{f_2} = T$, $\mathtt{f_3} = \min$, $\mathtt{f_4} = \max$, $\mathtt{f_5} = I_T$ met I_T de residuele implicator bij T en $\mathtt{f_6}(a, b) = T(I_T(a, b), I_T(b, a))$ voor alle $a, b \in [0, 1]$, komen de uitdrukkingen voor de connectieven van dit model overeen met die van het vaag Kripke model uit dit werk (zie definitie 4.2.2 en eigenschap 4.2.1). We construeren nu een vaag Kripke model dat aan elke formule en in elke wereld dezelfde waarheidswaarde toekent als het model dat we hierboven beschreven, waarbij we de interpretaties als werelden beschouwen. Stel dat we een vaag Kripke model $M = \langle S', \pi, R, T\rangle$ definiëren waarbij de verzameling van atomische proposities dezelfde is als in het model van Blondeel. Neem verder $S' = S \cup I$. Voor $p \in A$ stellen we $\pi(J)(p) = J(p)$ voor elke interpretatie $J \in \mathcal{F}(A)$. We onderscheiden nu twee gevallen. Als $S' = S$, m.a.w. $I \in S$, dan definiëren we een scherpe toegankelijkheidsrelatie R in S' die identisch 1 is. Als $S' \neq S$, m.a.w. $I \notin S$, dan definiëren we een scherpe toegankelijkheidsrelatie R in S' waarbij $R(I, J) = 1$ voor elke $J \in S$ en $R(J, I) = 0$ voor elke $J \in S'$. Verder stellen we $R(J_1, J_2) = 1$ voor elke $J_1, J_2 \in S$. In het vaag Kripke model $M = \langle S', \pi, R, T\rangle$ zal $[\varphi]_{M,J} = [\varphi]_{(J,S)}$ voor elke formule φ en elke $J \in S'$, in het bijzonder $[\varphi]_{M,I} = [\varphi]_{(I,S)}$ voor elke formule φ. □

4.3 Voorbeeld vaag Kripke model

Modellen om te redeneren over kennis of geloof worden vaak gebruikt in de medische diagnostiek [13]. De kennis die we in dat geval representeren is die van de arts met betrekking tot de symptomen of de karakteristieke eigenschappen van de patiënt.

Bepaalde karakteristieken zullen op het eerste zicht niet gegradeerd hoeven worden, maar m.b.v. een voorbeeld illustreren we dat dit toch aangewezen is. Stel bijvoorbeeld dat we willen bepalen of een patiënt zich in een risicogroep voor een bepaalde ziekte bevindt. De aandoening *ankylosing spondylitis* (ook de ziekte van Bechterew genoemd) komt bijvoorbeeld vooral voor bij mannen tussen de 20 en 40 jaar [13]. Zeldzame gevallen van afwijkingen van de geslachtschromosomen buiten beschouwing gelaten, kunnen we met zekerheid zeggen of de patiënt mannelijk of vrouwelijk is. We weten ook exact welke leeftijd de patiënt heeft en kunnen dus heel eenvoudig nagaan of dit tussen de 20 en 40 jaar is. Maar vanzelfsprekend stellen we ons al snel de vraag wat we dan doen met een 41-jarige. Die bevindt zich strikt genomen niet in de risicovolle leeftijdsgroep, maar die scherpe grenzen zijn uiteraard ook empirisch bepaald, men moest ergens een grens trekken en zoals vaak neemt men dan ronde getallen (tientallen hier). Zonder twijfel zal de aandoening ook reeds vastgesteld zijn bij 41-jarigen, zij het dan misschien in mindere mate als bij 30-jarigen bijvoorbeeld. Het zou dus verantwoord zijn deze patiënt nog te beschouwen als binnen de risicovolle leeftijdsgroep, zeker ten opzichte van bijvoorbeeld een 70-jarige, die zich er heel duidelijk niet in bevindt. Maar op die manier kunnen we de grens uiteraard blijven in vraag stellen (wat met 42- of 45-jarigen?).

Het is duidelijk dat een vage waarheidswaarde ons uit de nood kan helpen: we kunnen bijvoorbeeld patiënten die zich effectief binnen de grenzen van de leeftijdsgroep bevinden een 1 toekennen en dan gradueel verlagen afhankelijk van hoe ver de patiënt van de dichtste grens verwijderd is. Een mogelijkheid kan gevonden worden in onderstaande tabel. De waarheidswaarde (afgekort tot ww) van de uitspraak *de patiënt bevindt zich in de risicoleeftijdsgroep* wordt bepaald door de leeftijd van de patiënt. Deze waarheidswaarde wordt dan geïnterpreteerd als de mate waarin de patiënt zich in de riscoleeftijdsgroep bevindt. Zo bevindt een 43-jarige patiënt zich dus in de mate 0.5 in de risicoleeftijdsgroep.

leeftijd	$[0, 15]$	16	17	18	19	$[20, 40]$	41	42	43	44	$[45, 125]$
ww	0	0.25	0.5	0.75	0.9	1	0.9	0.75	0.5	0.25	0

Opmerking 4.3.1
Dubois en Prade [23] beklemtonen in hun artikel o.a. het verschil tussen gradatie en onzekerheid. In vage Kripke modellen hebben we met beide te maken. De leeftijd van de patiënt ligt vast. Zijn lidmaatschapsgraad in de risicoleeftijdsgroep is echter contextafhankelijk of dus onzeker in een bepaalde zin. We weten namelijk niet in welke mate de leeftijd van 41 jaar bijvoorbeeld nog een risicoleeftijd is. Dit aspect is onzeker. Men zou in principe resultaten uit medische studies kunnen gebruiken om deze onzekerheid zo juist mogelijk in kaart te brengen a.d.h.v. probabiliteitsdistributies.

Het aspect gradatie zit hem in het feit dat we aan elke leeftijd een lidmaatschapsgraad toekennen en niet de vooropgestelde scherpe grenzen van 20 en 40 jaar gebruiken. Indien we over zulke informatie beschikken, zal elke patiënt dus 1 enkele waarde, verbonden met zijn leeftijd, meekrijgen en dus zal het leeftijdsaspect in elke mogelijke wereld gelijk zijn.

Als men echter geen zekerheid heeft omtrent welke leeftijd welk risico met zich meebrengt, kan men meerdere manieren van gradaties hanteren die mogelijk andere lidmaatschapsgraden per leeftijd opleveren. Als we rekening houden met de mogelijkheid dat het oorspronkelijke interval $[20, 40]$ ruim berekend is, zouden we eveneens volgende gradatie in overweging kunnen nemen:

leeftijd	$[0, 19]$	20	21	22	23	$[24, 36]$	37	38	39	40	$[41, 125]$
ww	0	0.25	0.5	0.75	0.9	1	0.9	0.75	0.5	0.25	0

Indien we geen informatie hebben over welke van beide gradaties het dichtst bij de waarheid ligt, kunnen we beide als mogelijkheid beschouwen en zal het leeftijdsaspect meerdere werelden creëren, nl. één waarin een 39-jarige in de mate 1 een risicoleeftijd heeft en een andere waarin dit slechts 0.5 is. In dat geval spreken we van onzekerheid. M.a.w. het vage aspect van vage Kripke modellen zorgt voor gradatie in de vorm van graduele waarheidswaarden, het Kripke aspect voor onzekerheid in de vorm van mogelijke werelden. □

Andere symptomen van de ziekte van Bechterew zijn pijn in de lage rug, een beperking van de beweging van de lumbale wervelkolom en verminderde borstkasexpansie. Een symptoom als pijn in de lage rug is minder gemakkelijk te meten of vast te stellen door de arts. Het is eerder subjectief omdat elke patiënt pijn anders ervaart doordat de ene persoon pijngevoeliger is dan de andere. De ene zou zijn pijn misschien overdrijven, de andere juist minimaliseren. De kans is m.a.w. klein dat, als twee personen die objectief gezien dezelfde pijn hebben hier een maat zouden moeten opplakken, hetzelfde zouden zeggen. De arts, die niet in de patiënt zijn plaats kan voelen, moet zich hiervoor laten leiden door de informatie die de patiënt hem of haar geeft en eventuele kennis van de patiënt (is het iemand die durft overdrijven?). We hebben dus te maken met dubbele subjectiviteit: enerzijds die van de patiënt en anderzijds die van de arts. In het ideale geval heffen deze elkaar perfect op (en kan de arts bijvoorbeeld de mate van minimalisatie van de patiënt ongedaan maken), maar die kans is opnieuw klein.

Subjectieve, graduele symptomen zijn duidelijk moeilijk te beoordelen en het is dus heel handig als de arts meerdere mogelijkheden kan beschouwen, in de vorm van meerdere mogelijke werelden. In de ene wereld s kan de arts er dan bijvoorbeeld een mate van 0.3 opplakken, in een andere t bijvoorbeeld 0.5 en in nog een andere u 0.7. Zo worden er geen mogelijkheden uitgesloten aangezien de arts zich niet hoeft te beperken tot één keuze.

Wat betreft de toegankelijkheidsrelatie zou het aannemelijk zijn om wereld s en wereld u als sterk toegankelijk te beschouwen vanuit wereld t en omgekeerd (bijvoorbeeld $R(s,t) = R(t,v) = R(t,s) = R(v,t) = 0.7$) en de wereld s t.o.v. wereld u wat minder toegankelijk (bijvoorbeeld $R(s,v) = R(v,s) = 0.4$) omdat deze opties verder uit elkaar liggen en het dus minder plausibel is dat de pijn mate 0.3 zou kunnen hebben als we ervan uitgaan dat het 0.7 is. Een pijngradatie van 0.5 daarentegen lijkt wel nog aannemelijk vanuit de werelden s en u, vandaar de hogere toegankelijkheidsgraad t.o.v. wereld t.

Merk op dat we tot nu toe gebruik maken van een symmetrische relatie R omdat dit intuïtief het meest voor de hand ligt: welke reden zou er zijn dat we een wereld s als minder plausibel zouden beschouwen vanuit een wereld v dan omgekeerd?

Het is eveneens een intuïtieve overweging om een reflexieve toegankelijkheidsrelatie te gebruiken: het is in zekere zin maar logisch dat we de wereld die we als de echte beschouwen een perfect epistemisch alternatief is voor zichzelf. In het volgende hoofdstuk zal blijken dat een reflexieve toegankelijkheidsrelatie impliceert dat $[K\varphi]_{M,s} \leq [\varphi]_{M,s}$, $\forall M, s$, omdat het axioma $K\varphi \to \varphi$ geldt in een vaag Kripke model met reflexieve toegankelijkheidsrelatie (zie propositie 5.2.4). Dit wil zeggen dat als de patiënt in de mate a tot de risicoleeftijdsgroep behoort in de wereld s en we weten dat de patiënt in de mate b tot de risicoleeftijdsgroep behoort in elke wereld die lijkt op s, dat dan noodzakelijk $a \geq b$. Dit is logisch: we kunnen geen notie hebben van een hogere mate b in elke wereld die op s lijkt als het in s zelf maar in mate a geldt.

Samenvattend kunnen we stellen dat hoe meer twee werelden op elkaar lijken, hoe hoger de toegankelijkheidsgraad is die we toekennen aan deze twee werelden is. Mathematisch vertaalt deze techniek zich in een reflexieve, symmetrische en T-transitieve toegankelijkheidsrelatie R, m.a.w. een T-equivalentierelatie. Zo'n relatie wordt ook similariteitsrelatie genoemd [21], juist omdat de similariteit tussen de verschillende werelden gebruikt wordt om de mate te bepalen waarin ze aan elkaar gerelateerd zijn, of in dit geval tot elkaar toegankelijk zijn.

Concreet kunnen we dus ons vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ als volgt opstellen. De verzameling van atomische proposities is de verzameling van symptomen of karakteristieke eigenschappen van de patiënt (als mogelijke indicaties voor de ziekte). In het geval van de ziekte van Bechterew bekomen we:

$$A = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$$

met de atomische proposities

- p_1 = de patiënt is mannelijk,
- p_2 = de patiënt bevindt zich in de risicovolle leeftijdsgroep,
- p_3 = de patiënt heeft pijn in de lage rug,
- p_4 = de patiënt heeft een beperkte beweging van de lumbale wervelkolom,

- p_5 = de patiënt heeft een verminderde borstkasexpansie.

Het is niet onwaarschijnlijk dat er nog een heel scala aan aandoeningen of ziekten bestaan die enkele van deze symptomen kunnen verklaren en zelf nog andere kenmerkende symptomen hebben. Men kan de verzameling van proposities dus nog uitbreiden met deze andere mogelijke symptomen zodat ook andere aandoeningen eventueel gediagnoseerd kunnen worden met hetzelfde model. Om het voorbeeld hier niet al te ingewikkeld te maken, houden we het bij deze 5 symptomen.

Opmerking 4.3.2
Er kan enigzins verwarring ontstaan i.v.m. de interpretatie van een waarheidswaarde van de vorm $[K\varphi]_{M,s}$ in een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$. De interpretatie kan gemakkelijker uitgelegd worden a.d.h.v. een voorbeeld. Bovendien is het pas bij toepassingen dat de interpretatie van significant belang is (de wiskundige stellingen en bewijzen trekken zich van interpretaties immers weinig aan). Om deze redenen nemen we hier pas de tijd om daar bij stil te staan.

Stel dat φ staat voor de propositie *de patiënt bevindt zich in een risicoleeftijdsgroep*, m.a.w. $\varphi = p_2$. Belangrijk om te begrijpen wat de waarde $[K\varphi]_{M,s}$ ons vertelt, is de definitie ervan, met name de wijze waarop we de waarde bekomen. We nemen hiervoor het infimum van de waarden $I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})$ waarbij t loopt over de verzameling S van werelden. Bijgevolg geldt: hoe kleiner de waarde van $I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})$, hoe meer wereld t doorweegt in $[K\varphi]_{M,s}$. Uit eigenschap 3.1.6(1) volgt dat $I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})$ zich reduceert tot 1 voor elke wereld t die perfect ontoegankelijk is vanuit wereld s, i.e. $R(s,t) = 0$. Het komt er dus op neer dat zulke werelden niet bijdragen tot $[K\varphi]_{M,s}$, wat intuïtief logisch is: een wereld die we als perfect onmogelijk beschouwen kan ons geen extra informatie opleveren. Uit eigenschap 3.1.7 volgt dat $I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})$ zich reduceert tot $[\varphi]_{M,t}$ voor elke wereld t die een perfect epistemisch alternatief is van wereld s, i.e. $R(s,t) = 1$. We zien dus dat, indien de toegankelijkheidsrelatie R scherp is, $[K\varphi]_{M,s}$ het infimum is van de waarheidswaarden van $[\varphi]_{M,t}$ over de epistemische alternatieven t van s. De interpretatie van de waarheidswaarde $[Kp_2]_{M,s}$ wordt dus: in wereld s weten we 100% zeker dat de patiënt zich in de mate $[Kp_2]_{M,s}$ in een risicoleeftijdsgroep bevindt.

Stel nu dat voor de wereld t geldt dat $R(s,t) \in]0,1[$. Uit eigenschap 3.1.9(1) volgt dat t maar bijdraagt tot $[K\varphi]_{M,s}$ indien $R(s,t) > [\varphi]_{M,t}$, aangezien anders $I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) = 1$. We zin dat $I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) \geq I_T(1, [\varphi]_{M,t}) = [\varphi]_{M,t}$ wegens het dalend karakter van de implicator in het eerste argument. Stel dat $[\varphi]_{M,t} = [\varphi]_{M,t'}$ voor twee werelden t en t'. Dan zal de wereld die meer als mogelijk wordt beschouwd vanuit s het meest bijdragen tot $[K\varphi]_{M,s}$, wat we ook intuïtief verwachten. Aangezien we met een T-equivalentierelatie R werken, zullen we $[Kp_2]_{M,s}$ interpreteren als: we weten dat de patiënt zich in mate $[Kp_2]_{M,s}$ in een risicoleeftijdsgroep bevindt in alle werelden die op s lijken. $\square$

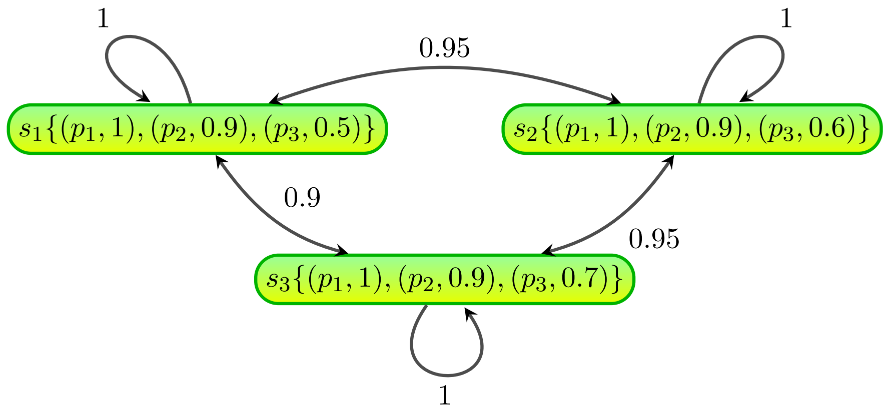
Elke ziekte heeft zijn specifieke symptomen en we kunnen een ziekte dus als een samengestelde formule definiëren. De eenvoudigste manier is om de ziekte simpelweg als de conjunctie van haar symptomen te definiëren. In ons voorbeeld van de ziekte van Bechterew wordt dit dan $p_1 \& p_2 \& p_3 \& p_4 \& p_5$. Met deze werkwijze is elk symptoom even significant en moeten alle symptomen aanwezig zijn om de ziekte te kunnen diagnosticeren. Stel dat een ziekte zich steeds uit in 3 symptomen p_1, p_2 en p_3 en sommige patiënten daarnaast nog last hebben van symptoom p_4 en anderen van symptoom p_5. Deze ziekte zou dan kunnen gedefinieerd worden als $p_1 \& p_2 \& p_3 \& (p_4 \vee p_5)$. Stel anderzijds dat het voldoende is dat een mannelijke patiënt in de risicovolle leeftijdsgroep klaagt van pijn in de lage rug en verminderde borstkasexpansie, zelfs als het niet veel is, om de ziekte te diagnosticeren, dan kan men bijvoorbeeld de formule $p_1 \& p_2 \& (\overline{0.3} \to p_3) \& (\overline{0.3} \to p_5)$ gebruiken. Als arts willen we weten of de patiënt aan een bepaalde ziekte lijdt. In formulevorm wordt dit $K\varphi$, waarbij φ de formule voor de ziekte is.

Bij de constructie van het model veronderstellen we dat de arts enkel werelden in het model opneemt die volgens hem mogelijk zijn, al is het maar in minieme mate. Stel dat de arts een mannelijke patiënt op bezoek krijgt, dan is hij zeker dat de waarheidswaarde van p_1 1 is en heeft het dus geen enkele zin om nog werelden te beschouwen waarin dit niet zo is. De werelden waarin de patiënt vrouwelijk is, worden op voorhand door de arts geëlimineerd om het model niet nodeloos te overladen. De arts kan dus per atomische propositie p_i bepaalde waarheidswaarden elimineren en enkel de waarden overhouden die hij of zij als mogelijk beschouwt. Merk op dat het theoretisch niet nodig is dat er slechts een eindig aantal waarheidswaarden als mogelijk beschouwd worden, maar in de praktijk is dit wel plausibel. Als iemand oneindig veel opties overweegt, wordt het verschil ertussen uiteindelijk verwaarloosbaar en is het weinig zinvol om nog zo'n klein onderscheid te maken. Als we willen weten in welke mate een bepaalde patiënt de symptomen van een bepaalde ziekte vertoont, doet het er weinig toe of het 0.915 of 0.916 is, wel interessant om te weten is of het rond de 0.2 draait of eerder rond de 0.8. De arts kan m.a.w. voor elk symptoom p_i ($i \in \{1, 2, \ldots, |A|\}$) a_i mogelijkheden in beschouwing nemen, met a_i eindig.

Als we aannemen dat de waarheidswaarden van de symptomen onderling onafhankelijk zijn van elkaar, dan zullen er in totaal $|S| = \prod_{i=1}^{|A|} a_i$ mogelijke werelden zijn, nl. één wereld voor elke mogelijke combinatie van waarheidswaarden. De correctheid van de aanname dat de waarheidswaarden van de symptomen onderling onafhankelijk zijn, is afhankelijk van de context en dit kan beter bepaald worden door iemand met de nodige medische kennis. Een arts beschikt misschien over de kennis dat bepaalde symptomen aan elkaar gerelateerd zijn. Stel dat de symptomen p_3 en p_4 positief met elkaar gerelateerd zijn, m.a.w. dat ze meestal samen voorkomen, en dat de arts voor beide afzonderlijk twijfelt tussen een uiting van de symptomen in de mate 0.3 en 0.6, dan kan hij in plaats van vier werelden $s\{(p_3, 0.3), (p_4, 0.3)\}$, $t\{(p_3, 0.3), (p_4, 0.6)\}$, $u\{(p_3, 0.6), (p_4, 0.3)\}$ en $v\{(p_3, 0.6), (p_4, 0.6)\}$ slechts de werelden s en v opnemen in het model. Als de onderlinge afhankelijkheid van de symptomen echter niet zo sterk is dat hij de werelden t en u met zekerheid kan elimineren, kan hij ze ook behouden, maar minder toegankelijk maken vanuit de andere werelden in het model. In het geval dat de aanname van onafhankelijke symptomen niet geldt, kan men het aantal mogelijke werelden niet met een algemene formule berekenen maar hangt dit dus af van de context. Wel zal $\prod_{i=1}^{|A|} a_i$ een bovengrens zijn voor het aantal mogelijke werelden, aangezien gerelateerde symptomen het aantal mogelijke combinaties enkel kunnen reduceren.

Stel dat de arts een mannelijke patiënt op bezoek krijgt. In dat geval kan met zekerheid de waarheidwaarde 1 toegekend worden aan de atomische propositie p_1 in elke wereld van het model, i.e. elke wereld met een andere waarheidswaarde voor p_1 wordt geëlimineerd. De patiënt is 41 jaar oud en dus kent de arts in elke wereld waarheidswaarde 0.9 toe aan p_2 (zie tabel boven opmerking 4.3.1), m.a.w. de patiënt bevindt zich in mate 0.9 in de risicoleeftijdsgroep. Deze patiënt klaagt van pijn in de lage rug. Op een pijnschaal van 0 (helemaal geen pijn) tot 10 (onhoudbare pijn) geeft de patiënt zijn pijn een 6. Op basis van zijn eigen observaties (fysisch onderzoek of visuele observatie of dergelijk) neemt de arts wat marge en creëert extra werelden waar de waarheidswaarde van p_3 0.5, 0.6 en 0.7

is. Op basis van enkel deze atomische proposities kunnen we bijvoorbeeld onderstaand schema tekenen.



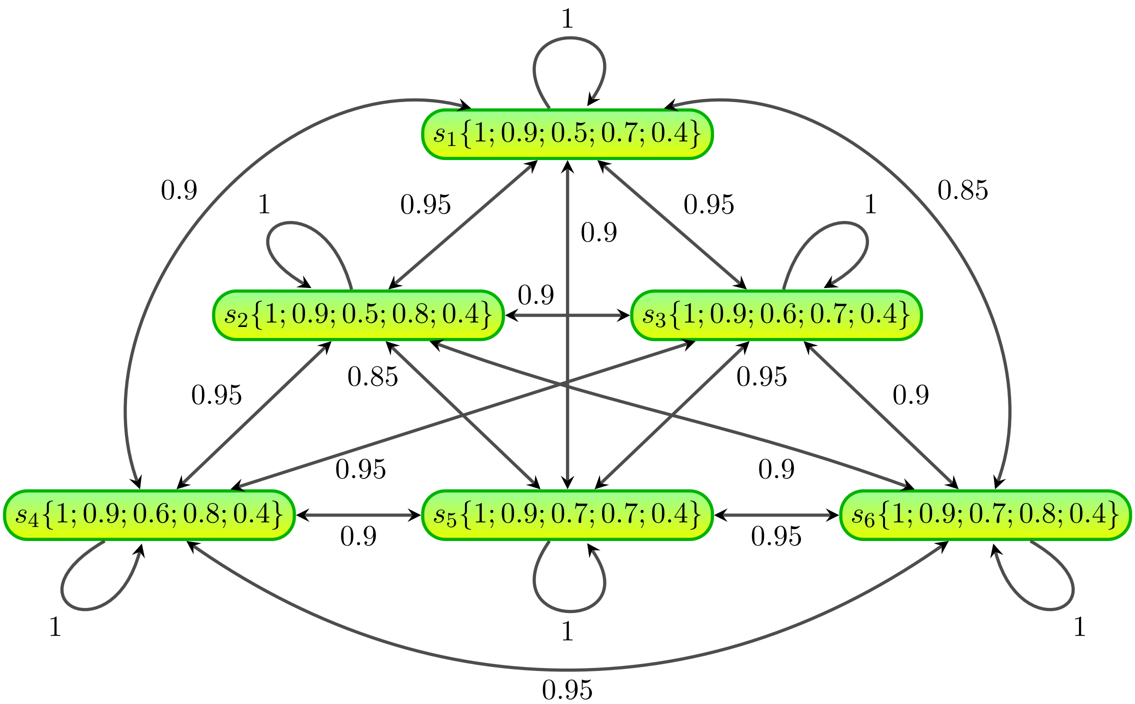
De arts gaat na a.d.h.v. informatie die de patiënt hem bezorgt en fysiek onderzoek in welke mate de beweging van de lumbale wervelkolom beperkt is. Hij twijfelt tussen 70% en 80%. Hiermee bedoelen we dat de arts elke combinatie van waarheidswaarden van de vorige atomische proposities eens aanvult met 0.7 voor p_4 en eens met 0.8. Overigens vermoedt de patiënt dat zijn borstkasexpansie er niet noemenswaardig op achteruit is gegaan. De arts weet echter dat zulke wijzigingen soms ongemerkt plaatsvinden omdat dit meestal zeer geleidelijk verandert. Hij kan bijvoorbeeld onderzoeken hoe het gesteld is met de borstkasexpansie van de patiënt en dit resultaat vergelijken met gemiddelden voor gelijkaardige patiënten (bijvoorbeeld gelijkaardig op vlak van gestalte, geslacht, leeftijd etc.). Laten we hier onderstellen dat de arts reden heeft om p_5 waarheidswaarde 0.4 toe te kennen in elke wereld. Aangezien de atomische proposities genummerd zijn, kunnen we op ons schema de notatie wat verkorten opdat het niet te zwaar zou worden. We zullen i.p.v. $\{(p_1,a_1),(p_2,a_2),(p_3,a_3),(p_4,a_4),(p_5,a_5)\}$ met a_i de waarheidswaarde van p_i simpelweg $\{a_1;a_2;a_3;a_4;a_5\}$ schrijven. Als we nu alle mogelijke combinaties van waarheidswaarden nemen, krijgen we in totaal 6 mogelijke werelden ($|S|=6$):

- $s_1\{1;0.9;0.5;0.7;0.4\}$,
- $s_2\{1;0.9;0.5;0.8;0.4\}$,
- $s_3\{1;0.9;0.6;0.7;0.4\}$,
- $s_4\{1;0.9;0.6;0.8;0.4\}$,
- $s_5\{1;0.9;0.7;0.7;0.4\}$,
- $s_6\{1;0.9;0.7;0.8;0.4\}$.

Zoals we reeds vermeldden, beschouwen we elke wereld als een perfect epistemisch alternatief voor zichzelf (m.a.w. we hanteren een reflexieve toegankelijkheidsrelatie). We hebben ook al geargumenteerd dat we met een symmetrische toegankelijkheidsrelatie zouden werken. Verder passen we onze intuïtieve regel toe dat de mate waarin werelden epistemische alternatieven zijn van elkaar samenhangt met de mate waarin ze op elkaar lijken wat betreft de waarheidswaarden van de atomische proposities. We bespreken in detail de toegankelijkheid van alle werelden vanuit s_1. De rest verloopt analoog. Kijken we bijvoorbeeld naar de werelden s_1 en s_2, dan zien we dat deze slechts in één waarheidswaarde van elkaar verschillen. We zullen daarom een toegankelijkheidsgraad van 0.95 toekennen tussen deze twee werelden. Hetzelfde geldt voor s_1 en s_3. Daarnaast zien we dat wereld s_1 dichter aanleunt bij werelden s_3 en s_5 dan bij s_4 en s_6 op vlak van de waarheidswaarde van p_4. Anderzijds is de afstand tussen s_1 en s_3 kleiner dan tussen s_1 en s_5 vanwege de waarheidswaarde in p_3. Een toegankelijkheidsrelatie die al deze opmerkingen vertaalt, is bijvoorbeeld:

$R(.,.)$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_1	1	0.95	0.95	0.9	0.9	0.85
s_2	0.95	1	0.9	0.95	0.85	0.9
s_3	0.95	0.9	1	0.95	0.95	0.9
s_4	0.9	0.95	0.95	1	0.9	0.95
s_5	0.9	0.85	0.95	0.9	1	0.95
s_6	0.85	0.9	0.9	0.95	0.95	1

We kunnen alle informatie nu samenvatten in een schema. Aangezien de toegankelijkheidsrelatie R als T_L-equivalentierelatie i.h.b. symmetrisch is, kunnen we één dubbele pijl tekenen tussen elke twee verschillende werelden met één gemeenschappelijke toegankelijkheidsgraad. Het mag duidelijk zijn dat zulke schema's enkel bruikbaar zijn indien er niet al te veel werelden zijn.



Als continue t-norm kiezen we de Łukasiewicz t-norm ($T_L(a,b) = \max(0, a+b-1)$, zie tabel 3.1). Deze keuze leidt tot een involutieve negator (zie eigenschap 3.1.8) m.a.w. dubbele negatie wordt opgeheven, wat intuïtief het meest aanleunt bij de realiteit. Opdat R T_L-transitief zou zijn, moet gelden dat $T_L(R(s_i, s_j), R(s_j, s_k)) \leq R(s_i, s_k)$, $\forall i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Aangezien R symmetrisch is, is dit equivalent met $\max(0, R(s_j, s_i) +$

$R(s_j, s_k) - 1) \leq R(s_i, s_k)$, $\forall i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dit is voldaan voor de toegankelijkheidsrelatie die we hier gebruiken (zie sectie A.3 van de appendix). Bijgevolg is R een T_L-equivalentierelatie. Merk op dat we deze op vrij natuurlijke wijze bekomen hebben, m.a.w. we hebben hiervoor geen contra-intuïtieve onderstellingen gemaakt, integendeel. Dit is eigenlijk een gevolg van het feit dat we werelden toegankelijker gemaakt hebben naarmate ze meer op elkaar lijken, we hebben dus een similariteitsrelatie gecreëerd (dit is een andere benaming voor een vage equivalentierelatie).

Laten we in dit voorbeeld volgende formule voor de ziekte van Bechterew onderstellen:

$$\varphi = (\overline{0.75} \to p_1)\&(\overline{0.8} \to p_2)\&(\overline{0.6} \to p_3)\&(\overline{0.75} \to p_4)\&(\overline{0.5} \to p_5).$$

Dit wil zeggen dat de ziekte typisch bij mannen voorkomt en bij mensen die zich in de risicovolle leeftijdsgroep bevinden. Voorts gaat de ziekte gepaard met aanzienlijk wat pijn in de lage rug en een vrij sterke beperking van de beweging van de lumbale wervelkolom. Ook is de borstexpansie van de patiënt door deze ziekte minstens gehalveerd.

We berekenen de waarheidswaarde van *de patiënt vertoont de symptomen van de ziekte van Bechterew* (i.e. $[\varphi]_{M,\cdot}$) in elke wereld en de waarheidswaarde van *we weten dat de patiënt de symptomen van de ziekte vertoont* (i.e. $[K\varphi]_{M,\cdot}$). We beschouwen ook een analoog model M' voor dezelfde patiënt indien deze vrouwelijk zou zijn (m.a.w. alles blijft gelijk, maar de waarheidswaarde van p_1 is 0 in elke wereld). Voor de Matlabcode van de berekeningen verwijzen we naar sectie A.3 van de appendix.

waarheidswaarde per wereld	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
$[\varphi]_{M,\cdot}$	0.75	0.8	0.85	0.9	0.85	0.9
$[K\varphi]_{M,\cdot}$	0.75	0.8	0.8	0.85	0.85	0.9
$[\varphi]_{M',\cdot}$	0	0.05	0.1	0.15	0.1	0.15
$[K\varphi]_{M',\cdot}$	0	0.05	0.05	0.1	0.1	0.15

Stel dat we vermoeden dat wereld s_3 de ware is, dan weten we dat de mannelijke patiënt de symptomen van de ziekte van Bechterew in de mate 0.8 vertoont in elke wereld die op s_3 lijkt. Voor de vrouwelijke patiënt geldt dit slechts in de mate 0.05. Voor de man is er dus een sterke indicatie dat dit de juiste diagnose zou kunnen zijn, voor de vrouw daarentegen lijkt deze diagnose uitgesloten. We kunnen ook de waarheidswaarde over het hele model berekenen. Rekening houdend met definitie 4.2.4 bekomen we:

$$[K\varphi]_M = 0.75 \text{ en } [K\varphi]_{M'} = 0.$$

De vrouwelijke patiënt zal niet aan de ziekte van Bechterew lijden aangezien we weten dat ze in geen enkele mate alle kenmerkende symptomen vertoont. We weten echter dat de mannelijke patiënt de symptomen in een mate van 0.75 vertoont, dit is een vrij sterke indicatie dat de ziekte van Bechterew de juiste diagnose zou kunnen zijn.

Indien de arts twijfelt tussen meerdere aandoeningen, zouden we het model, zoals eerder vermeld, kunnen uitbreiden door extra symptomen toe te voegen (in de vorm van atomische proposities) en meerdere ziekten te definiëren in formulevorm. We kunnen dan voor alle verschillende ziekten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de waarheidswaarden $[K\varphi_i]_{M,s}$ berekenen, met $i = 1, 2, \ldots, n$, waarbij $s \in S$ de wereld is waarvan we vermoeden dat deze de ware is. De hoogste waarheidswaarde correspondeert dan met de vermoedelijke ziekte van de patiënt aangezien dit er op wijst dat we weten dat de symptomen van deze ziekte in de hoogste mate tot uiting komen bij de patiënt in elke wereld die op s lijkt. Aangezien de arts bij de constructie van het model alle werelden heeft opgenomen die ook maar in de kleinste mate kans hebben om overeen te stemmen met de ware wereld, zijn we zeker dat de ware wereld in ons model zit. Merk hier nog bij op dat een kleine afwijking mogelijk is, aangezien de ware wereld bijvoorbeeld $s\{1; 0.92; 0.57; 0.81; 0.42\}$ zou kunnen zijn, maar duidelijk zal dit geen significant verschil in resultaten geven als de arts denkt dat $s_4\{1; 0.9; 0.6; 0.8; 0.4\}$ de ware wereld is. We kunnen immers nooit weten wat de precieze gedaante van de ware wereld is, maar het punt is dat dit er niet toe doet, we kunnen wel dicht genoeg in de buurt zitten om een zinvol resultaat te bekomen. Tevens is per constructie van het vaag Kripke model elke onmogelijke wereld op voorhand geëlimineerd. Als we geen flauw idee hebben welke de ware wereld is, kunnen we ons dus baseren op de waarheidswaarden over het model, nl. $[K\varphi_i]_M$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, om een diagnose te stellen.

Hoofdstuk 5

Naar een correct en volledig axiomatisch systeem?

5.1 Inleiding

We zullen trachten de weg vrij te maken naar het opstellen van een axiomastelsel en het vastleggen van een klasse vage Kripke modellen zodat het systeem bepaald door de axioma's en afleidingsregels correct en volledig is t.o.v. die bepaalde klasse vage Kripke modellen, naar analogie met het scherpe geval (zie bijvoorbeeld axiomasysteem 2.2.2). Ook de definities van correctheid en volledigheid zijn analoog met die in het scherpe geval (zie definities 2.2.6 en 2.2.7).

Definitie 5.1.1 (Correctheid)
Een axiomasysteem $\mathcal{K}$ is correct t.o.v. een klasse vage Kripke modellen $\mathcal{M}$ indien elke formule φ die volgt uit $\mathcal{K}$, geldig is (i.e. waarheidswaarde 1 heeft) in elk model van $\mathcal{M}$.

Definitie 5.1.2 (Volledigheid)
Een axiomasysteem $\mathcal{K}$ is volledig t.o.v. een klasse vage Kripke modellen $\mathcal{M}$ indien elke formule φ die geldig is in elk model van $\mathcal{M}$, een stelling is van $\mathcal{K}$.

Anders gezegd is een axiomasysteem $\mathcal{K}$ correct en volledig t.o.v. een klasse vage Kripke modellen $\mathcal{M}$ indien de stellingen van $\mathcal{K}$ (i.e. alle formules die bewezen kunnen worden uit $\mathcal{K}$) precies de tautologieën van $\mathcal{M}$ zijn (i.e. de formules die in elk model van $\mathcal{M}$ waarheidswaarde 1 hebben).

Opmerking 5.1.1
Deze definities van correctheid en volledigheid verschillen van de definities die doorgaans gebruikt worden voor correctheid en volledigheid van bijvoorbeeld een vaaglogica $\mathcal{C}$ t.o.v. een klasse residuele tralies $\mathbf{L}$ (zie definitie 3.2.6). Om het onderscheid te maken met definities 2.2.6 en 5.1.2, spreekt men daarnaast gewoonlijk van sterke correctheid en volledigheid. De residuele tralies bepalen de mogelijke interpretaties van de formules. Verder wordt gebruikt gemaakt van het begrip *theorie* Γ, waarmee een verzameling formules bedoeld wordt. We zeggen dat een formule φ bewijsbaar is uit Γ in $\mathcal{C}$ indien ze het laatste element is van een sequentie waarvan de leden formules zijn uit Γ of axioma's uit $\mathcal{C}$ of m.b.v. van afleidingsregels uit $\mathcal{C}$ volgen uit vorige leden van de sequentie [10]. De notatie hiervoor is $\Gamma \vdash_{\mathcal{C}} \varphi$. Voorts schrijven we $\Gamma \models_{\mathbf{L}} \varphi$ indien φ waarheidswaarde 1 heeft voor

elke interpretatie $\mathcal{L} \in \mathbf{L}$ waarvoor alle formules uit Γ waar zijn. De vaaglogica $\mathcal{C}$ is sterk correct t.o.v. $\mathbf{L}$ indien voor elke theorie Γ en voor elke formule φ geldt dat, als $\Gamma \vdash_{\mathcal{C}} \varphi$, dan $\Gamma \models_{\mathbf{L}} \varphi$. Het omgekeerde is sterke volledigheid [10]. Merk op dat de definities 5.1.1 en 5.1.2 hier speciale gevallen van zijn, nl. met $\Gamma = \phi$. Dit verklaart direct waarom het woord *sterk* wordt toegevoegd in de naamgeving. In dit werk zullen we echter streven naar correctheid en volledigheid in de betekenis van de definities 5.1.1 en 5.1.2 aangezien we dezelfde definities gehanteerd hebben in hoofdstuk 2. $\square$

We delen het vervolg van dit hoofdstuk op in twee secties. De eerste sectie, getiteld *correctheid*, omvat alle nodige ingrediënten om de correctheid van een axiomasysteem te bewijzen. We onderzoeken hierin namelijk de geldigheid van allerlei axioma's, waarvan de meeste afkomstig zijn uit de literatuur [4, 10, 14] en sommige zelf toegevoegd. Daarnaast nemen we ook verschillende afleidingsregels onder de loep en gaan na of de geldigheid van formules onder deze afleidingsregels behouden worden in vage Kripke modellen. Al deze informatie wordt gebundeld in tabel 5.2 aan het einde van deze sectie. We vergelijken deze resultaten met de analoge resultaten voor scherpe Kripke modellen uit hoofdstuk 2 (zie tabel 2.1) en leggen tenslotte we uit hoe men op basis van tabel 5.2 een correct axiomasysteem zou kunnen vastleggen t.o.v. een bepaalde klasse vage Kripke modellen. Zoals vermeld baseren we ons op verschillende axiomasystemen uit de literatuur [10]. Om de informatie per axiomasysteem niet te breken, zulen we bij het bespreken van deze axiomasystemen in de eerste sectie ook al de overeenkomstige volledigheidsresultaten vermelden. We geven hierbij tevens aanwijzingen hoe de resultaten uit de literatuur eventueel zouden kunnen bijdragen tot een eigen volledigheidsresultaat. In de tweede sectie, getiteld *volledigheid*, komen we hier op terug en bespreken we welke bewijsmethoden gehanteerd zouden kunnen worden om volledigheid van een axiomasysteem t.o.v. een bepaalde klasse vage Kripke modellen te bekomen. Voor de onderzochte methoden geven we ook aan waarom deze al dan niet zouden kunnen werken in ons geval.

5.2 Correctheid

Vooreerst zullen we in de eerste subsectie, *vaaglogica* getiteld, enkele propositionele vaaglogica's bekijken zonder modale operatoren bij het verhaal te betrekken. De belangrijkste is de basislogica BL [10], waarvan we ook al enkele nuttige eigenschappen vermelden. In de volgende subsectie halen we de modale operator erbij en bespreken o.a. het axiomasysteem vage **S5**, waar de subsectie naar vernoemd wordt. Dit is een axiomasysteem waarvan reeds correctheid en volledigheid werd bewezen [10] in een minder algemeen geval dan het onze, nl. vage Kripke modellen met de toegankelijkheidsrelatie $R = S \times S$ (zie definitie 4.2.3). Vervolgens onderzoeken we de geldigheid van een eerste reeks axioma's in de derde subsectie. Deze axioma's werden reeds onderzocht door Radzikoswka en Kerre [14], vandaar de evidente titel *axioma's Radzikowska en Kerre.* De reden waarom we met deze axioma's starten is het feit dat enkele axioma's uit vage **S5** hier bewezen worden, maar dan in meer algemene gevallen dan $R = S \times S$. we werken hun resultaten in detail uit. Daarna gaan we verder met het onderzoeken van de geldigheid van de overige axioma's van vage **S5** in de subsectie *axioma's vage* **S5**. In deze subsectie zal duidelijk worden dat het axiomasysteem vage *sv* onmogelijk correct en volledig kan zijn t.o.v. een ruimere klasse vage Kripke modellen dan deze met toegankelijkheidsrelatie $R = S \times S$. Zoals de titel van de volgende subsectie duidelijk maakt, onderzoeken we hierin *nog meer axioma's...* Op het einde van deze sectie komt ook het behoud van geldigheid van de afleidingsregels in de vage Kripke modellen aan bod. Tenslotte geven we in de laatste sectie een overzicht van alle axioma's en afleidingsregels die in deze sectie de revue gepasseerd zijn. We vergelijken deze resultaten met tabel 2.1 uit hoofdstuk 2 om de gelijkenissen en verschillen tussen de vage en de scherpe Kripke modellen bloot te leggen.

5.2.1 Vaaglogica

Een eerste idee om mogelijk een correct en volledig systeem te vinden, is het overnemen van het axiomasysteem uit [10, 11]. Zoals we reeds vermeldden, werkt Hájek in [10, 11] o.a. met continue t-normen, hun corresponderende residuele implicatoren en de scherpe toegankelijkheidsrelatie $R = S \times S$ (zie definitie 4.2.3). We zullen eerst enkele vaaglogica's bespreken zonder modale operatoren in de vaaglogische taal. Onderstaand axiomasysteem wordt de basislogica BL genoemd [10].

Axiomasysteem 5.2.1 (Basislogica BL)

1. $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
2. $(\varphi \& \psi) \to \varphi$
3. $(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$
4. $(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\psi \& (\psi \to \varphi))$
5. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi)$
6. $((\varphi \& \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
7. $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$
8. $\bar{0} \to \varphi$
9. modus ponens: $\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$
10. substitutieregel: $\forall \vec{\psi} : \frac{\varphi(\vec{p})}{\varphi(\frac{\vec{\psi}}{\vec{p}})}$

Opmerking 5.2.1

- De cursieve notatie BL van de basislogica mag niet verward worden met de vette notatie van de **BL**-algebra's.
- Net zoals in het scherpe geval, wordt de substitutieregel in de literatuur meestal niet expliciet vermeld als afleidingsregel (maar wel toegepast en dus impliciet ondersteld). Om consequent te zijn, kiezen wij er voor om deze wel expliciet te vermelden. De definitie van een substitutieformule is overigens hetzelfde als in het scherpe geval (zie definitie 2.2.5). □

Indien men dit axiomasysteem nog aanvult met andere axioma's, spreken we van een propositionele vaaglogica [10].

Definitie 5.2.1 (Propositionele vaaglogica [10])
Een propositionele vaaglogica $\mathcal{C}$ is een schematische uitbreiding van de basislogica BL, m.a.w. deze kan bekomen worden door (eindig of oneindig veel) axioma's toe te voegen aan axiomasysteem 5.2.1. De afleidingsregels van het axiomasysteem blijven modus ponens en substitutie.

In de lijn van opmerking 4.1.1(2) zijn er algebra's die gebruikt kunnen worden voor de interpretaties van formules zodanig dat bovenstaande axioma's steeds waarheidswaarde 1 zullen hebben. Ook kan men eisen dat omgekeerd elke formule die in elke algebra van die bepaalde klasse waarheidswaarde 1 heeft (i.e. elke tautologie) afgeleid kan worden uit axiomasysteem 5.2.1. De volledige klasse algebra's waarvoor de axioma's van de basislogica BL tautologieën zijn, zijn precies de **BL**-algebra's [10] (zie definitie 3.2.7). De t-algebra's (zie definitie 3.2.8) zijn dus niet de enige klasse algebra's waarvoor de axioma's van de basislogica BL tautologieën zijn. In [10] (daterend uit 1998) is Hájek er nog niet in geslaagd te bewijzen dat de basislogica correct en volledig is t.o.v. de t-algbra's. Wel zeker is dat elk axioma uit BL een t-tautologie is en dat de afleidingsregels de geldigheid behouden (i.e. een formule ψ afgeleid uit een formule φ m.b.v. de afleidingsregels uit BL zal waarheidswaarde 1 hebben in een t-algebra indien de oorspronkelijke formule φ waarheidswaarde 1 heeft in deze t-algebra). Bijgevolg zal elke stelling van BL een t-tautologie zijn, m.a.w. we hebben correctheid. Met een t-tautologie bedoelen we dat het een $\mathcal{L}$-tautologie is voor elke t-algebra $\mathcal{L}$. Er is op dat moment reeds een uitbreiding van BL gevonden, met twee extra axioma's, die volledig is t.o.v. de t-algebra's. Nog in hetzelfde jaar werkt Hájek in [9] een volledigheidsbewijs uit maar hij heeft nog niet kunnen aantonen of deze twee axioma's bewijsbaar zijn in BL, m.a.w. er is nog geen bewijs dat deze axioma's af te leiden zijn uit het axiomastelsel van BL. Pas 2 jaar later, in 2000, tonen Cignoli, Esteva, Godo en Torrens [26] aan dat dit wel degelijk het geval is. De basislogica BL is dus correct en volledig t.o.v. de t-algebra's.

We gebruiken hier opnieuw de benaming *stelling* van een axiomasysteem om te verwijzen naar de zaken die bewezen kunnen worden uit dit axiomasysteem (zie definitie 2.2.4). Hieronder bundelen we enkele interessante stellingen van BL, waarvan de geldigheid op het eerste zicht misschien evident lijkt. Een sluitend bewijs is echter onontbeerlijk voor de goede nachtrust van wiskundigen.

Eigenschap 5.2.1 (Stellingen van de basislogica BL [10])
In de basislogica BL kunnen o.a. volgende regels bewezen worden, waarbij φ, φ_1, …, φ_n, ψ, ψ_1, …, ψ_n en χ willeukeurige formules zijn:

1. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$,
2. $\varphi \to (\psi \to (\varphi \& \psi))$,
3. $((\varphi_1 \to \psi_1) \& (\varphi_2 \to \psi_2)) \to ((\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \psi_2))$,
4. $((\varphi \& \psi) \& \chi) \to (\varphi \& (\psi \& \chi))$, $(\varphi \& (\psi \& \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \& \chi)$,
5. $((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)$,
6. *Als $\varphi \to \psi$ geldt en $\psi \to \chi$ geldt, dan geldt $\varphi \to \chi$,*
7. *Als φ geldt en ψ geldt, dan geldt $\varphi \& \psi$,*

8. *Als* $\varphi_1 \to \psi_1$, $\varphi_2 \to \psi_2$, $\ldots$, $\varphi_n \to \psi_n$ *gelden,*
   dan geldt $(\varphi_1\&\varphi_2\&\ldots\&\varphi_n) \to (\psi_1\&\psi_2\&\ldots\&\psi_n)$*,*

9. $\varphi \to \varphi$*,*

10. $(\varphi\&\bar{1}) \leftrightarrow \varphi$*,*

11. $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$*,*

12. $\varphi \to \neg\neg\varphi$*,*

13. $(\bar{1} \to \varphi) \leftrightarrow \varphi$*.*

Bewijs

1. Lemma 2.2.7(2) uit [10].

2. Lemma 2.2.8(5) uit [10].

3. Lemma 2.2.8(7) uit [10].

4. Lemma 2.2.8(8) uit [10].

5. Lemma 2.2.10(16) uit [10].

6. We veronderstellen dat $\varphi \to \psi$ geldt en dat $\psi \to \chi$ geldt. Het eerste axioma van BL (axioma 5.2.1(1)) houdt in dat $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ geldt. Combineren we dit met het feit dat $\varphi \to \psi$ geldt, dan levert modus ponens ons op dat $(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$ geldt. Combineren we dit met het feit dat $\psi \to \chi$ geldt, dan levert modus ponens ons op dat $\varphi \to \chi$ geldt.

7. We veronderstellen dat φ geldt en dat ψ geldt. Uit het tweede puntje weten we dat $\varphi \to (\psi \to (\varphi\&\psi))$ geldt. Combineren we dit met het feit dat φ geldt, dan levert modus ponens ons op dat $\psi \to (\varphi\&\psi)$ geldt. Combineren we dit met het feit dat ψ geldt, dan levert modus ponens ons op dat $\varphi\&\psi$ geldt.

8. We veronderstellen dat $\varphi_1 \to \psi_1$, $\varphi_2 \to \psi_2$, $\ldots$, $\varphi_n \to \psi_n$ gelden. Uit puntje 7 weten we dat $(\varphi_1 \to \psi_1)\&(\varphi_2 \to \psi_2)$ geldt. Combineren we dit met het derde puntje, dan levert modus ponens ons op dat $(\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\psi_2)$ geldt. Als we dezelfde redenering toepassen op deze formule en het feit dat $\varphi_3 \to \psi_3$ geldt, bekomen we dat $((\varphi_1\&\varphi_2)\&\varphi_3) \to ((\psi_1\&\psi_2)\&\psi_3)$ geldt. Uit puntje 4 , gecombineerd met puntje 7 en definitie 4.1.1, blijkt dat geldt:

   $$((\varphi\&\psi)\&\chi) \leftrightarrow (\varphi\&(\psi\&\chi)).$$

   M.a.w. de sterke conjunctie is associatief is en we mogen de haakjes dus zonder verwarring achterwege laten. Bijgevolg geldt er dat $(\varphi_1\&\varphi_2\&\varphi_3) \to (\psi_1\&\psi_2\&\psi_3)$. Het is duidelijk dat we het gestelde bekomen indien we dezelfde redenering blijven herhalen.

9. Lemma 2.2.7(3) uit [10].

10. Enerzijds maken we gebruik van het tweede axioma van de basislogica toegepast met $\psi = \bar{1}$, m.a.w. $(\varphi \& \bar{1}) \to \varphi$. Anderzijds steunen we op Lemma 2.2.14(20) [10], nl. $\varphi \to (\bar{1} \& \varphi)$. Het derde axioma van BL houdt in dat de sterke conjunctie commutatief is en dus geldt $(\varphi \& \bar{1}) \leftrightarrow \varphi$ wegens puntje 7 en per definitie van de equivalentie (zie definitie 4.1.1).

11. Lemma 2.2.8(4) uit [10].

12. Lemma 2.2.12(17) uit [10].

13. Enerzijds gebruiken we lemma 2.2.14(20') [10]: $(\bar{1} \to \varphi) \to \varphi$. Anderzijds gebruiken we lemma 2.2.7(1) uit [10]: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ met $\psi = \bar{1}$. M.b.v. het zevende puntje en per definitie van de equivalentie bekomen we het gestelde. □

Opmerking 5.2.2
Aangezien we weten dat de basislogica BL correct en volledig is t.o.v. de t-algebra's, kunnen we deze stellingen van BL even goed bewijzen m.b.v. de algebraïsche vertalingen in de vorm van waarheidswaarden. We bewijzen m.a.w. dat een formule voor elke t-algebra waarheidswaarde 1 heeft (i.e. dat een formule een t-tautologie is), wat wegens de volledigheid impliceert dat ze een stelling is van BL. Zo kan je bijvoorbeeld gemakkelijk inzien dat eigenschap 3.1.9(18) gecombineerd met eigenschap 3.1.9(1) de algebraïsche verificatie is van de stelling $((\varphi \leftrightarrow \psi)\&(\psi \leftrightarrow \chi)) \to (\varphi \leftrightarrow \chi)$, wegens de definities van de modellering (zie opmerking 4.1.1(2) toegepast op t-algebra's). Er wordt m.a.w. nagegaan dat deze formule voor om het even welke waarheidswaarden van haar componenten φ, ψ en χ waarheidswaarde 1 zal opleveren. Eigenschap 3.1.9(17) is de algebraïsche vertaling van de stelling $((\varphi \to \psi)\&(\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi)$. □

Men kan tevens, nadat men een specifieke continue t-norm vastlegt, een axiomastelsel zoeken dat correct en volledig is t.o.v. de T-algebra, i.e. de t-algebra geassocieerd met de t-norm T en zijn residuele implicator I_T. Men zoekt m.a.w. de propositionele vaaglogica $\mathcal{C}_T$ die correct en volledig is t.o.v. de T-alebgra. Indien men het axiomasysteem 5.2.1 bijvoorbeeld uitbreidt met het axioma $\neg\neg\varphi \to \varphi$, bekomt men de Łukasiewicz propositionele vaaglogica $\mathcal{C}_L$ [10]. De benaming verwijst naar de correctheid en volledigheid van deze vaaglogica t.o.v. de Łukasiewicz-algebra (m.a.w. t.o.v. $\mathbf{L} = ([0,1], \min, \max, T_L, I_L, 0, 1)$). Aangezien het axioma $\varphi \to \neg\neg\varphi$ reeds tot de basislogica behoort (zie eigenschap 5.2.1(12)), bekomen we wegens eigenschap 5.2.1(7) dat $(\neg\neg\varphi \to \varphi)\&(\varphi \to \neg\neg\varphi)$ geldt. Wegens definitie 4.1.1 geldt dus $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$. Wegens definitie 4.1.1 i.v.m. de interpretatie van de negatie en wegens de definitie van **MV**-algebra's (zie definitie 3.2.9), zien we dat de axioma's van de Łukasiewicz propositionele vaaglogica voldaan zijn voor elke **MV**-algebra. Een voorbeeld van een **MV**-algebra met een continue t-norm is de Łukasiewicz-algebra $([0,1], \min, \max, T_L, I_L, 0, 1)$ (wegens eigenschap 3.1.8).

5.2.2 Vage S5

We beschouwen vanaf hier logica's met modale operatoren (meer bepaald met de kennisoperator en zijn duale). In [10, 11] vertrekt men van een gefixeerde propositionele vaaglogica $\mathcal{C}_T$ (zie definitie 5.2.1), i.e. de propositionele vaaglogica geassocieerd met de continue t-norm T en zijn residuele implicator. Hiermee bedoelen we dat $\mathcal{C}_T$ correct en volledig is t.o.v. de T-algebra $([0,1], \min, \max, T, I_T, 0, 1)$. Men bekomt dat onderstaande lijst axioma's en afleidingsregels een correct en volledig systeem vormen t.o.v. de klasse vage Kripke modellen volgens definitie 4.2.3, i.e. met de vaste continue t-norm T, bijhorende residuele implicator en toegankelijkheidsrelatie $R = S \times S$. We zullen deze klasse vage Kripke modellen noteren als $\mathcal{M}_T$. Het gehele axiomasysteem draagt de naam vage **S5**. We voegen een benedenindex T toe om duidelijk te maken welke propositionele vaaglogica gehanteerd wordt.

Axiomasysteem 5.2.2 (Vage $\mathbf{S5}_T$)

- axioma's en afleidingsregels van de propositionele vaaglogica $\mathcal{C}_T$,
- axioma's en afleidingsregels met de modale kennisoperator en zijn duale:
    1. $K\varphi \to \varphi$,
    2. $\varphi \to \bar{K}\varphi$,
    3. (a) $K(K\psi \to \varphi) \to (K\psi \to K\varphi)$,
       (b) $K(\bar{K}\psi \to \varphi) \to (\bar{K}\psi \to K\varphi)$,
    4. (a) $K(\varphi \to K\psi) \to (\bar{K}\varphi \to K\psi)$,
       (b) $K(\varphi \to \bar{K}\psi) \to (\bar{K}\varphi \to \bar{K}\psi)$,
    5. (a) $K(\varphi \vee K\psi) \to (K\varphi \vee K\psi)$,
       (b) $K(\varphi \vee \bar{K}\psi) \to (K\varphi \vee \bar{K}\psi)$,
    6. $(\bar{K}\varphi \& \bar{K}\varphi) \leftrightarrow \bar{K}(\varphi \& \varphi)$,
    7. noodzakelijkheid: $\frac{\varphi}{K\varphi}$.

We zullen de nummering uit deze opsomming gebruiken om eenvoudig naar de axioma's te verwijzen. Als we in het vervolg bijvoorbeeld spreken over axioma 5(a) bedoelen we dus $K(\varphi \vee K\psi) \to (K\varphi \vee K\psi)$.

Opmerking 5.2.3

- Hájek suggereert deze axioma's reeds in 1998 in [10] maar komt pas in 2010 tot een volledigheidsbewijs in [11]. Hij maakt hiervoor gebruik van een verband tussen een vaagkwantorenlogica en een vaagmodale logica en een eerder door hem aangetoonde volledigheid van deze vaagkwantorenlogica in [10]. Wij hebben hier echter geen uitbreiding van deze vaagkwantorenlogica bestudeerd, dus kunnen we zijn bewijstechniek niet overnemen voor het algemene geval waarin de toegankelijkheidsrelatie R niet noodzakelijk $S \times S$ is.

- Welke axioma's precies aan de basislogica toegevoegd moeten worden om de propositionele vaaglogica $\mathcal{C}_T$ te bekomen, hangt uiteraard af van de t-norm T. Onder opmerking 5.2.2 vermeldden we reeds dat dit bijvoorbeeld voor de Łukasiewicz t-norm enkel het axioma $\neg\neg\varphi \to \varphi$ is. Voor het algebraïsch product zijn de extra axioma's $\neg\neg\chi \to (((\varphi\&\chi) \to (\psi\&\chi)) \to (\varphi \to \psi))$ en $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \bar{0}$. [10]. In dit werk hebben we echter de kennis van deze extra axioma's niet nodig. □

Aangezien de axioma's 1 t.e.m. 6 en de noodzakelijkheidsregel tautologiëen zijn van de vage Kripke modellen $\mathcal{M}_T$ met om het even welke continue t-norm T wegens de correctheidheid van vage $\mathbf{S5}_T$ t.o.v. $\mathcal{M}_T$, gelden ze ook voor de gehele klasse vage Kripke modellen volgens definitie 4.2.3 met continue t-normen ($T \in \mathcal{T}_c$) en corresponderende residuele implicatoren, nl. voor $\mathcal{M}' := \{\mathcal{M}_T | T \in \mathcal{T}_c\}$. We definiëren een nieuw axiomasysteem, dat bevat is in axiomasysteem 5.2.2 per definitie van een propositionele vaaglogica. We noemen dit axiomasysteem vage **S5**, zonder benedenindex omdat het niet verbonden is aan een specifieke t-norm.

Axiomasysteem 5.2.3 (Vage **S5**)

- axioma's en afleidingsregels van de basislogica BL,
- axioma's 1 t.e.m. 6 en de noodzakelijkheidsregel.

We tonen aan dat vage **S5** correct en volledig is t.o.v. de klasse van vage Kripke modellen $\mathcal{M}'$ (i.p.v. de klasse vage Kripke modellen $\mathcal{M}_T$ met een gefixeerde $T \in \mathcal{T}_c$). Belangrijk is dat we hier nog steeds de vage Kripke modellen volgens definitie 4.2.3 bedoelen. Voor correctheid moet gelden dat elke stelling van axiomasysteem 5.2.3 waarheidswaarde 1 heeft in elk model van $\mathcal{M}'$. Aangezien we reeds opmerkten dat alle axioma's van dit systeem ook bevat zijn in de vage $\mathbf{S5}_T, \forall T \in \mathcal{T}_c$, is elke stelling van axiomasysteem 5.2.3 ook een stelling van de vage $\mathbf{S5}_T, \forall T \in \mathcal{T}_c$. Aangezien vage $\mathbf{S5}_T$ correct is t.o.v. de klasse vage Kripke modellen $\mathcal{M}_T$, heeft elke stelling van vage **S5** waarheidswaarde 1 in elk model van $\mathcal{M}_T$. Dit geldt voor elke continue t-norm T, dus zulke stelling heeft waarheidswaarde 1 in elk model van de klasse $\mathcal{M}'$. Bijgevolg is axiomasysteem 5.2.3 correct t.o.v. $\mathcal{M}'$. Voor volledigheid moet gelden dat elke $\mathcal{M}'$-tautologie een stelling is van het axiomasysteem 5.2.3. Een $\mathcal{M}'$-tautologie is een formule die waarheidswaarde 1 heeft in elk model van de klasse $\mathcal{M}'$. Zij φ zo'n formule. Aangezien $\mathcal{M}_T \subset \mathcal{M}'$ voor elke continue t-norm T, heeft φ waarheidswaarde 1 voor elk model van de klasse $\mathcal{M}_T$, $\forall T \in \mathcal{T}_c$. Uit de volledigheid van vage $\mathbf{S5}_T$ t.o.v. $\mathcal{M}_T$ volgt dat φ kan afgeleid worden uit de axioma's en afleidingsregels van vage $\mathbf{S5}_T$ en dit voor elke continue t-norm T. De axioma's en afleidingsregels waar modale operatoren in voorkomen zijn dezelfde in elk van deze axiomasystemen, nl. axioma 1 t.e.m. 6 en de noodzakelijkheidsregel. Deze behoren eveneens tot het axiomasysteem 5.2.3. In het bewijs van φ uit de vage $\mathbf{S5}_T$ ($T \in \mathcal{T}_c$) zijn alle stappen die betrekking hebben op modale operatoren dus eveneens mogelijk in het axiomasysteem 5.2.3. Dat dit ook geldt voor de stappen die geen betrekking hebben op modale operatoren volgt uit het feit dat BL correct en volledig is t.o.v. de t-algebra's. Dit houdt namelijk in dat alles wat geldt voor elke t-algebra, bewijsbaar is uit de basislogica BL. Bijgevolg mogen we er zeker van zijn dat het bewijs van een $\mathcal{M}'$-tautologie in de vage $\mathbf{S5}_T$ met T een continue t-norm ook zal gelden in het axiomasysteem 5.2.3. Dit houdt in dat elke $\mathcal{M}'$-tautologie een stelling is van axiomasysteem 5.2.3, m.a.w. axiomasysteem 5.2.3 is volledig t.o.v. de klasse vage Kripke modellen $\mathcal{M}'$.

5.2.3 Axioma's Radzikowska en Kerre

De naamgeving vaag Kripke model verwijst vanaf nu naar definitie 4.2.1 en de notatie $\mathcal{M}$ naar de klasse van zulke vage Kripke modellen waarbij de residuele implicator gebruikt wordt voor de modellering van de implicatie, i.e. vage Kripke modellen van de vorm $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$. Het verschil tussen de vage Kripke modellen volgens definitie 4.2.3 en definitie 4.2.1 zit hem in de toegankelijkheidsrelatie R, die in het tweede geval niet $S \times S$ is en evenmin scherp. Voorlopig stellen we in definitie 4.2.1 als enige eis dat $R \in \mathcal{R}(S)$, m.a.w. R is een vaagrelatie op S. Verder zijn alle voorwaarden dezelfde m.a.w. we zullen continue t-normen en hun residuele implicatoren gebruiken. Aangezien de toegankelijkheidsrelatie enkel gebruikt wordt om de waarheidswaarde van een formule die

K of $\bar{K}$ bevat te berekenen, zal er niets veranderen aan de geldigheid van de axioma's van de basislogica. We moeten dus enkel nagaan onder welke voorwaarden op de vaagrelatie R de axioma's en afleidingsregels die K of $\bar{K}$ bevatten, geldig zijn. Hiervoor zullen we o.a. gebruik maken van resultaten uit [14], waarin Radzikowska en Kerre aantoonden dat axioma's 1 en 2 gelden indien de toegankelijkheidsrelatie reflexief is. Verder bewezen Radzikowska et al. geen axioma's meer uit vage **S5**, maar onderstaande tabel geeft een overzicht van de axioma's die ze wel onderzochten [14]. Links vermelden we de axioma's, rechts de voldoende voorwaarde op R waaronder ze gelden.

axioma	voldoende voorwaarde
A. $K\varphi \to \bar{K}\varphi$	seriële R
B. $K\varphi \to \varphi$	reflexieve R
C. $\varphi \to \bar{K}\varphi$	reflexieve R
D. $\bar{K}K\varphi \to \varphi$	symmetrische R
E. $\varphi \to K\bar{K}\varphi$	symmetrische R
F. $\bar{K}K\varphi \to K\varphi$	T-Euclidische R
G. $\bar{K}\varphi \to K\bar{K}\varphi$	T-Euclidische R
H. $K\varphi \to KK\varphi$	T-transitieve R
I. $\bar{K}\bar{K}\varphi \to \bar{K}\varphi$	T-transitieve R

Tabel 5.1: Axioma's Radzikowska en Kerre [14]

De letters uit de tabel zullen we gebruiken om naar de axioma's te verwijzen. Merk op dat axioma B overeenkomt met axioma 1 en axioma C met axioma 2. Met een voldoende voorwaarde bedoelen we dat de uitdrukking in de linkerkolom voor alle formules in elk vaag Kripke model met de specifieke toegankelijkheidsrelatie R uit de rechterkolom zal gelden. Zij α een willekeurig axioma en zij P een eigenschap van R, dan is het voldoende dat een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ een R met eigenschap P bezit opdat elke instantie van het axioma zou gelden in M, wat we als volgt noteren:

$$M \models \alpha.$$

Zo kan α bijvoorbeeld $K\varphi \to \bar{K}\varphi$ zijn en P is dan serieel. We voeren nog enkele notaties in. Zoals steeds is A een niet-ledige, aftelbare verzameling van atomische proposities. Zij S een niet-ledige verzameling, dan noteren we alle mogelijke interpretaties π van de atomische proposities uit A per wereld als Π_S, m.a.w.

$$\Pi_S = \{\pi | \pi : S \to (A \to [0, 1])\}.$$

Eigenschap P van R is een voldoende voorwaarde voor axioma α:

$$\forall S \neq \phi, \forall \pi \in \Pi_S, \forall T \in \mathcal{T}_c : R \text{ heeft eigenschap } P \Rightarrow \langle S, \pi, R, T\rangle \models \alpha. \tag{5.1}$$

Radzikowska en Kerre bewezen ook dat de vermelde voorwaarden nodig zijn, maar niet in deze betekenis:

$$\forall S \neq \phi, \forall \pi \in \Pi_S, \forall T \in \mathcal{T}_c : \langle S, \pi, R, T\rangle \models \alpha \Rightarrow R \text{ heeft eigenschap } P. \tag{5.2}$$

Ze bewezen een iets zwakkere vorm:

$$\forall S \neq \phi, \forall T \in \mathcal{T}_c : (\forall \pi \in \Pi_S : \langle S, \pi, R, T\rangle \models \alpha) \Rightarrow R \text{ heeft eigenschap} P. \tag{5.3}$$

In alle proposities die volgen m.b.t. het voldoende zijn van een voorwaarde op R opdat een axioma zou gelden, bedoelen we dit in de betekenis (5.1), tenzij anders vermeld. In de proposities m.b.t. het nodig zijn van een voorwaarde op R zullen we meestal de betekenis zoals in (5.3) hanteren, tenzij anders vermeld.

Opmerking 5.2.4
Stel dat de vaagrelatie R al de eigenschappen heeft die vermeld worden in de rechterkolom van tabel 5.1, dan spreken we van een T-equivalentierelatie [14] (zie ook definitie 3.1.14). Merk op dat serialiteit volgt uit reflexiviteit en dat T-transitiviteit en T-Euclideiteit equivalent zijn indien de vaagrelatie symmetrisch is. We kunnen een T-equivalentierelatie dus omschreven als een vaagrelatie die reflexief, symmetrisch en T-transitief is (de vage uitbreidingen van de karakteristieke eigenschappen van een equivalentierelatie, vandaar ook de naam T-equivalentierelatie). Aangezien we werken met residuele implicatoren van continue t-normen, geldt dat $I(a,b) = 1 \Leftrightarrow a \leq b$ (zie eigenschap 3.1.9(1)). Bijgevolg, als bijvoorbeeld de axioma's $\varphi \to \psi$ en $\psi \to \chi$ gelden (waarheidswaarde 1 hebben in elk model), betekent dit dat $[\varphi]_{M,s} \leq [\psi]_{M,s}$ en $[\psi]_{M,s} \leq [\chi]_{M,s}$, $\forall s, \forall M$. Hieruit volgt dat $[\varphi]_{M,s} \leq [\chi]_{M,s}$, $\forall s, \forall M$, m.a.w. uit $\varphi \to \psi$ en $\psi \to \chi$ mogen we wel degelijk afleiden dat $\varphi \to \chi$ geldt, zoals in het scherpe geval. Hiermee zien we gemakkelijk in dat het axioma $K\varphi \to \bar{K}\varphi$, dat geldt onder seriële vaagrelaties, volgt uit de axioma's B en C, die gelden onder reflexieve vaagrelaties. Dit is logisch aangezien serialiteit volgt uit reflexiviteit. We zien ook dat de axioma's die gelden onder symmetrische vaagrelaties volgen uit de axioma's onder reflexieve vaagrelaties en onder T-Euclidische vaagrelaties: $K\varphi \to \varphi$ en $\bar{K}K\varphi \to K\varphi$ impliceren $\bar{K}K\varphi \to \varphi$ en analoog impliceren $\varphi \to \bar{K}\varphi$ en $\bar{K}\varphi \to K\bar{K}\varphi$ het axioma $\varphi \to K\bar{K}\varphi$. Dit is eveneens logisch aangezien een reflexieve, T-Euclidische vaagrelatie altijd symmetrisch is. Voor een T-Euclidische vaagrelatie $R \in \mathcal{R}(S)$ geldt immers dat $T(R(u,v), R(u,w)) \leq R(v,w)$, $\forall u,v,w \in S$. I.h.b. geldt dus (kies $u = w$ en wissel de rollen van v en w daarna om):

$$T(R(w,v), R(w,w)) \leq R(v,w), \forall v,w \in S \text{ en } T(R(v,w), R(v,v)) \leq R(w,v), \forall v,w \in S.$$

Uit de reflexiviteit van R en de randvoorwaarde van T volgt:

$$\begin{aligned} R(w,v) \leq R(v,w), \forall v,w \in S \text{ en } R(v,w) \leq R(w,v), \forall v,w \in S \\ \Rightarrow R(v,w) = R(w,v), \forall v,w \in S. \end{aligned}$$

Bijgevolg is R symmetrisch. Indien we ons dus beperken tot T-equivalentierelaties bij het opbouwen van een axiomastelsel, kunnen we de axioma's A, D en E dus achterwege laten. Merk op dat ook op syntactisch niveau de vermelde axioma's uit elkaar afgeleid kunnen worden wegens eigenschap 5.2.1(6). □

We zullen nu de resultaten uit tabel 5.1 in detail uitwerken, waarbij we de grote lijnen van de bewijzen voor voldoende voorwaarden overnemen van Radzikowska en Kerre [14]. Indien er twee axioma's zijn met dezelfde nodige voorwaarde, werken ze er slechts één van uit en geven de kernidee voor het andere. Wij zullen hier steeds beide axioma's in detail behandelen.

Propositie 5.2.2 (Voldoende voorwaarde axioma A [14])
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met een seriële toegankelijkheidsrelatie R geldt:

$$M \models K\varphi \to \bar{K}\varphi, \forall \varphi \in L_A.$$

Bewijs Zij $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ een willekeurig vaag Kripke model, s een willekeurige wereld uit S en φ een formule uit L_A. We moeten bewijzen dat $[K\varphi \to \bar{K}\varphi]_{M,s} = 1$. We berekenen deze waarheidswaarde m.b.v. de definitie van de implicatie:

$$
\begin{aligned}
& [K\varphi \to \bar{K}\varphi]_{M,s} = I_T([K\varphi]_{M,s}, [\bar{K}\varphi]_{M,s}) \\
& \quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
& = I_T(\inf_{t \in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), [\bar{K}\varphi]_{M,s}) \\
& \quad \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
& = I_T(\inf_{t \in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), \sup_{t \in S} T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})) \\
& \quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(6) } \rangle \\
& \geq \sup_{t \in S} I_T(I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})) \\
& \quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(2), } T \text{ stijgend en } I_T \text{ stijgend in tweede argument } \rangle \\
& \geq \sup_{t \in S} I_T(I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), T(R(s,t), T(R(s,t), I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})))) \\
& \quad \langle\ T \text{ associatief } \rangle \\
& = \sup_{t \in S} I_T(I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), T(T(R(s,t), R(s,t)), I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}))) \\
& \quad \langle\ T \text{ commutatief } \rangle \\
& = \sup_{t \in S} I_T(I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), T(I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), T(R(s,t), R(s,t)))) \\
& \quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(10) met } a = I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) \text{ en } b = T(R(s,t), R(s,t)) \ \rangle \\
& \quad \langle \text{ supremum stijgend } \rangle \\
& \geq \sup_{t \in S} T(R(s,t), R(s,t)) \\
& \quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(7) } \rangle \\
& = T(\sup_{t \in S} R(s,t), \sup_{t \in S} R(s,t)) \\
& \quad \langle\ R \text{ serieel } \rangle \\
& = T(1,1) \\
& \quad \langle \text{ randvoorwaarde } T\ \rangle \\
& = 1
\end{aligned}
$$

Aangezien $[K\varphi \to \bar{K}\varphi]_{M,s} \in [0,1]$ volgt dat $[K\varphi \to \bar{K}\varphi]_{M,s} = 1$. Het gestelde volgt uit het arbitrair zijn van s, M en φ. $\square$

Men kan ook aantonen dat de serialtiteit van de toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is opdat axioma A zou gelden in een vaag Kripke model, zelfs in de sterke betekenis zoals in (5.2) aangegeven. Dit bewijs werken we zelf uit en is verschillend van dat uit [14], waar enkel de zwakkere variant (5.3) aangetoond wordt.

Propositie 5.2.3 (Nodige voorwaarde axioma A)
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ waarin geldt dat

$$M \models K\varphi \to \bar{K}\varphi, \forall \varphi \in L_A$$

is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk serieel.

Bewijs Zij $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ een vaag Kripke model waar voor elke formule φ geldt dat

$$[K\varphi \to \bar{K}\varphi]_{M,s} = 1, \forall s \in S.$$

I.h.b. geldt dit voor $\varphi = \bar{1}$:

$$\begin{aligned}
& [K\bar{1} \to \bar{K}\bar{1}]_{M,s} = 1, \forall s \in S \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
& I_T([K\bar{1}]_{M,s}, [\bar{K}\bar{1}]_{M,s}) = 1, \forall s \in S \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
& I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\bar{1}]_{M,t}), [\bar{K}\bar{1}]_{M,s}) = 1, \forall s \in S \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
& I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\bar{1}]_{M,t}), \sup_{u\in S} T(R(s,u), [\bar{1}]_{M,u})) = 1, \forall s \in S \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ definitie modellering constante } \rangle \\
& I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), 1), \sup_{u\in S} T(R(s,u), 1)) = 1, \forall s \in S \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ randvoorwaarde } T \ \rangle \\
& I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), 1), \sup_{u\in S} R(s,u)) = 1, \forall s \in S \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ eigenschap 3.1.6(2) } \rangle \\
& I_T(\inf_{t\in S} 1, \sup_{u\in S} R(s,u)) = 1, \forall s \in S \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \inf(1) = 1 \ \rangle \\
& I_T(1, \sup_{u\in S} R(s,u)) = 1, \forall s \in S \\
\Leftrightarrow \quad & \langle \text{ eigenschap 3.1.7 } \rangle \\
& \sup_{u\in S} R(s,u) = 1, \forall s \in S
\end{aligned}$$

m.a.w. R is noodzakelijk serieel. □

Uit de volgende propositie volgt dat axioma B en C gelden indien de toegankelijkheidsrelatie van het vaag Kripke model reflexief is. In [14] wordt voor het bewijs gerefereerd naar een ander artikel, maar we werken het bewijs hier zelf uit.

Propositie 5.2.4 (Voldoende voorwaarde axioma B en C [14])
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met een reflexieve toegankelijkheidsrelatie R geldt:

1. $M \models K\varphi \to \varphi, \forall \varphi \in L_A$,
2. $M \models \varphi \to \bar{K}\varphi, \forall \varphi \in L_A$.

Bewijs Zij $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ een willekeurig vaag Kripke model met reflexieve toegankelijkheidsrelatie R, s een willekeurige wereld uit S en φ een formule uit L_A.

1. We moeten bewijzen dat $[K\varphi \to \varphi]_{M,s} = 1$. M.b.v. de definitie van de implicatie bekomen we:

$$[K\varphi \to \varphi]_{M,s} = I_T([K\varphi]_{M,s}, [\varphi]_{M,s})$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle\\
&= I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t),[\varphi]_{M,t}),[\varphi]_{M,s})\\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.9(5) } \rangle\\
&\geq \sup_{t\in S} I_T(I_T(R(s,t),[\varphi]_{M,t}),[\varphi]_{M,s})\\
&\langle \text{ definitie supremum en } s\in S \rangle\\
&\geq I_T(I_T(R(s,s),[\varphi]_{M,s}),[\varphi]_{M,s})\\
&\langle\ R \text{ reflexief } \rangle\\
&= I_T(I_T(1,[\varphi]_{M,s}),[\varphi]_{M,s})\\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.7 } \rangle\\
&= I_T([\varphi]_{M,s},[\varphi]_{M,s})\\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.9(1) } \rangle\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Aangezien $[K\varphi \to \varphi]_{M,s} \in [0,1]$ volgt dat $[K\varphi \to \varphi]_{M,s} = 1$.

2. We willen aantonen dat $[\varphi \to \bar{K}\varphi]_{M,s} = 1$. We maken opnieuw gebruik van de definitie van de implicatie en bekomen:

$$
\begin{aligned}
[\varphi \to \bar{K}\varphi]_{M,s} &= I_T([\varphi]_{M,s},[\bar{K}\varphi]_{M,s})\\
&\langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle\\
&= I_T([\varphi]_{M,s},\sup_{t\in S} T(R(s,t),[\varphi]_{M,t}))\\
&\langle \text{ definitie supremum, } s\in S \text{ en } I_T \text{ stijgend in tweede argument } \rangle\\
&\geq I_T([\varphi]_{M,s},T(R(s,s),[\varphi]_{M,s}))\\
&\langle\ R \text{ reflexief } \rangle\\
&= I_T([\varphi]_{M,s},T(1,[\varphi]_{M,s}))\\
&\langle \text{ randvoorwaarde } T \rangle\\
&= I_T([\varphi]_{M,s},[\varphi]_{M,s})\\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.9(1) } \rangle\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Aangezien $[\varphi \to \bar{K}\varphi]_{M,s} \in [0,1]$ volgt dat $[\varphi \to \bar{K}\varphi]_{M,s} = 1$.

Het gestelde volgt uit het arbitrair zijn van s, M en φ. □

Men kan ook aantonen dat de reflexiviteit van de toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is opdat deze axioma's zouden gelden in een vaag Kripke model, in de betekenis van (5.3).

Propositie 5.2.5 (Nodige voorwaarde axioma B en C [14])
Zij S een niet-ledige verzameling van mogelijke werelden, $R \in \mathcal{R}(S)$ een vage toegankelijkheidsrelatie en T een continue t-norm.

1. *Indien geldt dat*

$$M \models K\varphi \to \varphi, \forall \varphi \in L_A, \forall M = \langle S,\pi,R,T\rangle \ \textit{ met } \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk reflexief.

2. Indien geldt dat

$$M \models \varphi \to \bar{K}\varphi, \forall \varphi \in L_A, \forall M = \langle S, \pi, R, T\rangle \;\; \textit{met } \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk reflexief.

Bewijs We bewijzen het gestelde door contrapositie, m.a.w. we onderstellen dat R niet reflexief is. Stel daartoe dat $s' \in S$ een wereld is waarvoor $R(s', s') \neq 1$, m.a.w. $R(s', s') < 1$. Aangezien A niet-ledig is, bestaat er minstens één atomische propositie $p \in A$.

1. We beschouwen een interpretatie π' uit Π_S zodat

   $$\pi'(t)(p) = R(s', t), \forall t \in S.$$

   Aangezien $p \in A$ geldt $p \in L_A$. Per definitie is $M = \langle S, \pi', R, T\rangle$ een vaag Kripke model. Bij veronderstelling moet gelden dat

   $$[Kp \to p]_{M,s} = 1, \forall s \in S \text{ dus i.h.b. } [Kp \to p]_{M,s'} = 1.$$

   We werken dit uit m.b.v. de definitie van de implicatie:

   $$\begin{aligned}
   [Kp \to p]_{M,s'} &= I_T([Kp]_{M,s'}, [p]_{M,s'}) \\
   &\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
   &= I_T(\inf_{t \in S} I_T(R(s', t), [p]_{M,t}), [p]_{M,s'}) \\
   &\quad \langle \text{ definitie } \pi' \rangle \\
   &= I_T(\inf_{t \in S} I_T(R(s', t), R(s', t)), R(s', s')) \\
   &\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(1) } \rangle \\
   &= I_T(\inf_{t \in S} 1, R(s', s')) \\
   &\quad \langle \inf(1) = 1 \rangle \\
   &= I_T(1, R(s', s')) \\
   &\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.7 } \rangle \\
   &= R(s', s') \\
   &\quad \langle \text{ assumptie m.b.t. } R \text{ niet reflexief } \rangle \\
   &< 1
   \end{aligned}$$

   Dit is in strijd met de onderstelling, dus moet R noodzakelijk reflexief zijn.

2. We beschouwen een interpretatie π' uit Π_S zodat

   $$\pi'(s')(p) = 1 \text{ en } \pi'(t)(p) = 0, \forall t \neq s'.$$

   Aangezien $p \in A$ geldt $p \in L_A$. Per definitie is $M = \langle S, \pi', R, T\rangle$ een vaag Kripke model. Bij veronderstelling moet gelden dat

   $$[p \to \bar{K}p]_{M,s} = 1, \forall s \in S \text{ dus i.h.b. } [p \to \bar{K}p]_{M,s'} = 1.$$

   We werken dit uit m.b.v. de definitie van de implicatie:

   $$[p \to \bar{K}p]_{M,s'} = I_T([p]_{M,s'}, [\bar{K}p]_{M,s'})$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
&= I_T([p]_{M,s'}, \sup_{t \in S} T(R(s',t), [p]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \text{ } \rangle \\
&= I_T(1, \max(\sup_{t \in S \setminus \{s'\}} T(R(s',t),0), T(R(s',s'),1))) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \text{ en eigenschap 3.1.1(2) } \rangle \\
&= I_T(1, \max(\sup_{t \in S \setminus \{s'\}} 0, R(s',s'))) \\
&\quad \langle \text{ sup}(0) = 0 \text{ en } R(s',s') \geq 0 \text{ } \rangle \\
&= I_T(1, R(s',s')) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.7 } \rangle \\
&= R(s',s') \\
&\quad \langle \text{ assumptie m.b.t. } R \text{ niet reflexief } \rangle \\
&< 1
\end{aligned}
$$

Dit is in strijd met de onderstelling, dus moet R noodzakelijk reflexief zijn. □

Uit de volgende propositie volgt dat axioma D en E gelden indien de toegankelijkheidsrelatie van het vaag Kripke model symmetrisch is. In [14] wordt voor het bewijs gerefereerd naar een ander artikel, maar we werken het bewijs hier zelf uit.

Propositie 5.2.6 (Voldoende voorwaarde axioma D en E [14])
In elk vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ met symmetrische R geldt

1. $M \models \bar{K}K\varphi \to \varphi, \forall \varphi \in L_A$,
2. $M \models \varphi \to K\bar{K}\varphi, \forall \varphi \in L_A$.

Bewijs Zij $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ een willekeurig vaag Kripke model met symmetrische toegankelijkheidsrelatie R, s een willekeurige wereld uit S en φ een formule uit L_A.

1. We moeten bewijzen dat $[\bar{K}K\varphi \to \varphi]_{M,s} = 1$. Per definitie van de implicatie en wegens eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[\bar{K}K\varphi]_{M,s} \leq [\varphi]_{M,s}$. M.b.v. de definitie van de duale kennisoperator bekomen we:

$$
\begin{aligned}
[\bar{K}K\varphi]_{M,s} &= \sup_{t \in S} T(R(s,t), [K\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= \sup_{t \in S} T(R(s,t), \inf_{u \in S} I_T(R(t,u), [\varphi]_{M,u})) \\
&\quad \langle \text{ definitie infimum, } s \in S \text{ en } T \text{ stijgend } \rangle \\
&\leq \sup_{t \in S} T(R(s,t), I_T(R(t,s), [\varphi]_{M,s})) \\
&\quad \langle \text{ } R \text{ symmetrisch } \rangle \\
&= \sup_{t \in S} T(R(s,t), I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,s})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(2) en supremum stijgend } \rangle
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{t \in S} [\varphi]_{M,s} \\
&\quad \langle\ [\varphi]_{M,s} \text{ onafhankelijk van } t\ \rangle \\
&= [\varphi]_{M,s}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt het gestelde.

2. We willen aantonen dat $[\varphi \rightarrow K\bar{K}\varphi]_{M,s} = 1$. Per definitie van de implicatie en wegens eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[\varphi]_{M,s} \leq [K\bar{K}\varphi]_{M,s}$. M.b.v. de definitie van de kennisoperator bekomen we:

$$\begin{aligned}
[K\bar{K}\varphi]_{M,s} &= \inf_{t \in S} I_T(R(s,t), [\bar{K}\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
&= \inf_{t \in S} I_T(R(s,t), \sup_{u \in S} T(R(t,u), [\varphi]_{M,u})) \\
&\quad \langle \text{ definitie supremum, } s \in S,\ I_T \text{ stijgend in tweede argument } \rangle \\
&\quad \langle \text{ infimum stijgend } \rangle \\
&\geq \inf_{t \in S} I_T(R(s,t), T(R(t,s), [\varphi]_{M,s})) \\
&\quad \langle\ R \text{ symmetrisch } \rangle \\
&= \inf_{t \in S} I_T(R(s,t), T(R(s,t), [\varphi]_{M,s})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(2) en infimum stijgend } \rangle \\
&\geq \inf_{t \in S} [\varphi]_{M,s} \\
&\quad \langle\ [\varphi]_{M,s} \text{ onafhankelijk van } t\ \rangle \\
&= [\varphi]_{M,s}
\end{aligned}$$

Dit is wat we wouden aantonen.

Het gestelde volgt uit het arbitrair zijn van s, M en φ. □

Propositie 5.2.7 (Nodige voorwaarde axioma D en E [14])
Zij S een niet-ledige verzameling van mogelijke werelden, $R \in \mathcal{R}(S)$ een vage toegankelijkheidsrelatie en T een continue t-norm.

1. *Indien geldt dat*

$$M \models \bar{K}K\varphi \rightarrow \varphi, \forall \varphi \in L_A, \forall M = \langle S, \pi, R, T \rangle \ \text{ met } \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk symmetrisch.

2. *Indien geldt dat*

$$M \models \varphi \rightarrow K\bar{K}\varphi, \forall \varphi \in L_A, \forall M = \langle S, \pi, R, T \rangle \ \text{ met } \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk symmetrisch.

Bewijs We bewijzen het gestelde door contrapositie, m.a.w. we onderstellen dat R niet symmetrisch is. Stel daartoe dat er twee werelden $s', t' \in S$ bestaan waarvoor $R(s',t') \neq R(t',s')$. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we onderstellen dat $R(s',t') < R(t',s')$. Aangezien A niet-ledig is, bestaat er minstens één atomische propositie $p \in A$.

1. We beschouwen een interpretatie π' uit Π_S zodat

$$\pi'(t)(p) = R(s', t), \forall t \in S.$$

Aangezien $p \in A$ geldt $p \in L_A$. Per definitie is $M = \langle S, \pi', R, T \rangle$ een vaag Kripke model. Bij veronderstelling moet gelden dat

$$[\bar{K}Kp \to p]_{M,s} = 1, \forall s \in S \text{ dus i.h.b. } [\bar{K}Kp \to p]_{M,t'} = 1.$$

Omwille van de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[\bar{K}Kp]_{M,t'} \leq [p]_{M,t'}$. We werken het linkerlid uit m.b.v. de definitie van de duale kennisoperator:

$$\begin{aligned}
[\bar{K}Kp]_{M,t'} &= \sup_{u \in S} T(R(t', u), [Kp]_{M,u}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= \sup_{u \in S} T(R(t', u), \inf_{v \in S} I_T(R(u, v), [p]_{M,v})) \\
&\quad \langle \text{ defintie } \pi' \rangle \\
&= \sup_{u \in S} T(R(t', u), \inf_{v \in S} I_T(R(u, v), R(s', v))) \\
&\quad \langle \text{ definitie supremum en } s' \in S \rangle \\
&\geq T(R(t', s'), \inf_{v \in S} I_T(R(s', v), R(s', v))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(1) } \rangle \\
&= T(R(t', s'), \inf_{v \in S} 1) \\
&\quad \langle \text{ inf}(1) = 1 \rangle \\
&= T(R(t', s'), 1) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \rangle \\
&= R(t', s') \\
&\quad \langle \text{ assumptie m.b.t. } R \text{ niet symmetrisch } \rangle \\
&> R(s', t') \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \rangle \\
&= [p]_{M,t'}
\end{aligned}$$

Dit is in strijd met de onderstelling, dus moet R noodzakelijk symmetrisch zijn.

2. We beschouwen een interpretatie π' uit Π_S zodat

$$\pi'(t')(p) = 1 \text{ en } \pi'(t)(p) = 0, \forall t \neq t'.$$

Aangezien $p \in A$ geldt $p \in L_A$. Per definitie is $M = \langle S, \pi', R, T \rangle$ een vaag Kripke model. Bij veronderstelling moet gelden dat

$$[p \to K\bar{K}p]_{M,s} = 1, \forall s \in S \text{ dus i.h.b. } [p \to K\bar{K}p]_{M,t'} = 1.$$

Omwille van de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[K\bar{K}p]_{M,t'} \geq [p]_{M,t'}$. We werken het linkerlid uit m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$[K\bar{K}p]_{M,t'} = \inf_{u \in S} I_T(R(t', u), [\bar{K}p]_{M,u})$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
&= \inf_{u \in S} I_T(R(t', u), \sup_{v \in S} T(R(u, v), [p]_{M,v})) \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \text{ } \rangle \\
&= \inf_{u \in S} I_T(R(t', u), \max(\sup_{v \in S \setminus \{t'\}} T(R(u, v), 0), T(R(u, t'), 1))) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \text{ en eigenschap 3.1.1(2) } \rangle \\
&= \inf_{u \in S} I_T(R(t', u), \max(\sup_{v \in S \setminus \{t'\}} 0, R(u, t'))) \\
&\quad \langle \sup(0) = 0 \text{ en } R(u, t') \geq 0 \text{ } \rangle \\
&= \inf_{u \in S} I_T(R(t', u), R(u, t')) \\
&\quad \langle \text{ definitie infimum en } s' \in S \text{ } \rangle \\
&\leq I_T(R(t', s'), R(s', t')) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(1) en assumptie m.b.t. } R \text{ niet symmetrisch } \rangle \\
&< 1 \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \text{ } \rangle \\
&= [p]_{M,t'}
\end{aligned}
$$

Dit is in strijd met de onderstelling, dus moet R noodzakelijk symmetrisch zijn. □

In de volgende propositie tonen we aan dat axioma F en G gelden indien de toegankelijkheidsrelatie van het vaag Kripke model T-Euclidisch is.

Propositie 5.2.8 (Voldoende voorwaarde axioma F en G [14])
In elk vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ met T-Euclidische R geldt

1. $M \models \bar{K}K\varphi \rightarrow K\varphi, \forall \varphi \in L_A$,
2. $M \models \bar{K}\varphi \rightarrow K\bar{K}\varphi, \forall \varphi \in L_A$.

Bewijs Zij $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ een willekeurig vaag Kripke model met T-Euclidische toegankelijkheidsrelatie, s een willekeurige wereld uit S en φ een formule uit L_A.

1. We moeten bewijzen dat $[\bar{K}K\varphi \rightarrow K\varphi]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie in een vaag Kripke model en eigenschap 3.1.9(1) is het te bewijzen equivalent met $[\bar{K}K\varphi]_{M,s} \leq [K\varphi]_{M,s}$. Zij v een willekeurige wereld uit S. M.b.v. de definitie van de kennisoperator bekomen we:

$$
\begin{aligned}
[K\varphi]_{M,v} &= \inf_{u \in S} I_T(R(v, u), [\varphi]_{M,u}) \\
&\quad \langle \text{ } R \text{ } T\text{-Euclidisch en } I_T \text{ dalend in eerste argument } \rangle \\
&\quad \langle \text{ infimum stijgend } \rangle \\
&\leq \inf_{u \in S} I_T(T(R(s, v), R(s, u)), [\varphi]_{M,u}) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\
&= \inf_{u \in S} I_T(R(s, v), I_T(R(s, u), [\varphi]_{M,u})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= I_T(R(s,v), \inf_{u\in S} I_T(R(s,u), [\varphi]_{M,u})) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= I_T(R(s,v), [K\varphi]_{M,s}) && (5.4)
\end{aligned}
$$

Als we de definitie van de duale kennisoperator gebruiken, bekomen we:

$$
\begin{aligned}
[\bar{K}K\varphi]_{M,s} &= \sup_{v\in S} T(R(s,v), [K\varphi]_{M,v}) \\
&\quad \langle \text{ (5.4), } T \text{ en supremum stijgend } \rangle \\
&\leq \sup_{v\in S} T(R(s,v), I_T(R(s,v), [K\varphi]_{M,s})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(2) en supremum stijgend } \rangle \\
&\leq \sup_{v\in S} [K\varphi]_{M,s} \\
&\quad \langle\ [K\varphi]_{M,s} \text{ onafhankelijk van } v\ \rangle \\
&= [K\varphi]_{M,s}
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt het gestelde.

2. We willen aantonen dat $[\bar{K}\varphi \to K\bar{K}\varphi]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie in een vaag Kripke model en eigenschap 3.1.9(1) is deze uitspraak equivalent met $[\bar{K}\varphi]_{M,s} \leq [K\bar{K}\varphi]_{M,s}$. Zij v een willekeurige wereld uit S. M.b.v. de definitie van de duale kennisoperator bekomen we:

$$
\begin{aligned}
[\bar{K}\varphi]_{M,v} &= \sup_{u\in S} T(R(v,u), [\varphi]_{M,u}) \\
&\quad \langle\ R\ T\text{-Euclidisch en } T \text{ en supremum stijgend } \rangle \\
&\geq \sup_{u\in S} T(T(R(s,v), R(s,u)), [\varphi]_{M,u}) \\
&\quad \langle\ T \text{ associatief } \rangle \\
&= \sup_{u\in S} T(R(s,v), T(R(s,u), [\varphi]_{M,u})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.2(1) } \rangle \\
&= T(R(s,v), \sup_{u\in S} T(R(s,u), [\varphi]_{M,u})) \\
&\quad \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
&= T(R(s,v), [\bar{K}\varphi]_{M,s}) && (5.5)
\end{aligned}
$$

Als we de definitie van de kennisoperator gebruiken, bekomen we:

$$
\begin{aligned}
[K\bar{K}\varphi]_{M,s} &= \inf_{v\in S} I_T(R(s,v), [\bar{K}\varphi]_{M,v}) \\
&\quad \langle \text{ (5.5), } I_T \text{ stijgend in tweede argument en infimum stijgend } \rangle \\
&\geq \inf_{v\in S} I_T(R(s,v), T(R(s,v), [\bar{K}\varphi]_{M,s})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(10) en infiumum stijgend } \rangle \\
&\geq \inf_{v\in S} [\bar{K}\varphi]_{M,s} \\
&\quad \left\langle\ [\bar{K}\varphi]_{M,s} \text{ onafhankelijk van } v\ \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$= [\bar{K}\varphi]_{M,s}$$

Dit is wat we wouden aantonen.

Het gestelde volgt uit het arbitrair zijn van s, M en φ. □

We kunnen ook aantonen dat T-Eucliditeit van de toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is opdat de axioma's F en G zouden gelden in een vaag Kripke model.

Propositie 5.2.9 (Nodige voorwaarde axioma F en G [14])
Zij S een niet-ledige verzameling van mogelijke werelden, $R \in \mathcal{R}(S)$ een vage toegankelijkheidsrelatie en T een continue t-norm.

1. *Indien geldt dat*

$$M \models \bar{K}K\varphi \to K\varphi, \forall\varphi \in L_A, \forall M = \langle S, \pi, R, T\rangle \ \textit{ met } \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk T-Euclidisch.

2. *Indien geldt dat*

$$M \models \bar{K}\varphi \to K\bar{K}\varphi, \forall\varphi \in L_A, \forall M = \langle S, \pi, R, T\rangle \ \textit{ met } \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk T-Euclidisch.

Bewijs We bewijzen het gestelde door contrapositie, m.a.w. we onderstellen dat R niet T-Euclidisch is. Stel daartoe dat er werelden s', t' en u' in S bestaan waarvoor $T(R(s', t'), R(s', u')) > R(t', u')$. Aangezien A niet-ledig is, bestaat er minstens één atomische propositie $p \in A$.

1. We beschouwen een interpretatie π' uit Π_S zodat

$$\pi'(t)(p) = R(t', t), \forall t \in S.$$

Aangezien $p \in A$ geldt $p \in L_A$. Per definitie is $M = \langle S, \pi', R, T\rangle$ een vaag Kripke model. Bij veronderstelling moet gelden dat

$$[\bar{K}Kp \to Kp]_{M,s} = 1, \forall s \in S \text{ dus i.h.b. } [\bar{K}Kp \to Kp]_{M,s'} = 1.$$

We werken eerst de waarheidswaarde $[\bar{K}Kp]_{M,s'}$ uit m.b.v. de definitie van de duale kennisoperator:

$$\begin{aligned}
[\bar{K}Kp]_{M,s'} &= \sup_{u\in S} T(R(s', u), [Kp]_{M,u}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= \sup_{u\in S} T(R(s', u), \inf_{v\in S} I_T(R(u, v), [p]_{M,v})) \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \ \rangle \\
&= \sup_{u\in S} T(R(s', u), \inf_{v\in S} I_T(R(u, v), R(t', v))) \\
&\quad \langle \text{ definitie supremum en } t' \in S \ \rangle \\
&\geq T(R(s', t'), \inf_{v\in S} I_T(R(t', v), R(t', v)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(1) } \rangle \\
&= T(R(s',t'), \inf_{v\in S} 1) \\
&\quad \langle \inf(1) = 1 \rangle \\
&= T(R(t',s'), 1) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \rangle \\
&= R(s',t')
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Voor $[\bar{K}Kp \to Kp]_{M,s'}$ bekomen we m.b.v. de definitie van de implicatie:

$$\begin{aligned}
&[\bar{K}Kp \to Kp]_{M,s'} = I_T([\bar{K}Kp]_{M,s'}, [Kp]_{M,s'}) \\
&\quad \langle \text{ (5.6) en } I_T \text{ dalend in eerste argument } \rangle \\
&\leq I_T(R(s',t'), [Kp]_{M,s'}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= I_T(R(s',t'), \inf_{u\in S} I_T(R(s',u), [p]_{M,u})) \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \rangle \\
&= I_T(R(s',t'), \inf_{u\in S} I_T(R(s',u), R(t',u))) \\
&\quad \langle \text{ definitie infimum, } u' \in S \text{ en } I_T \text{ stijgend in tweede argument } \rangle \\
&\leq I_T(R(s',t'), I_T(R(s',u'), R(t',u'))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\
&= I_T(T(R(s',t'), R(s',u')), R(t',u')) \\
&\quad \langle \text{ assumptie m.b.t. } R \text{ niet } T\text{-Euclidisch en eigenschap 3.1.9(1) } \rangle \\
&< 1
\end{aligned}$$

Dit is in strijd met de onderstelling, dus moet R noodzakelijk T-Euclidisch zijn.

2. We beschouwen een interpretatie π' uit Π_S zodat

$$\pi'(u')(p) = 1 \text{ en } \pi'(s)(p) = 0, \forall s \neq u'.$$

Aangezien $p \in A$ geldt $p \in L_A$. Per definitie is $M = \langle S, \pi', R, T \rangle$ een vaag Kripke model. Bij veronderstelling moet gelden dat

$$[\bar{K}p \to K\bar{K}p]_{M,s} = 1, \forall s \in S \text{ dus i.h.b. } [\bar{K}p \to K\bar{K}p]_{M,s'} = 1.$$

We werken de waarheidswaarde $[K\bar{K}p]_{M,s'}$ uit m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$\begin{aligned}
&[K\bar{K}p]_{M,s'} = \inf_{t\in S} I_T(R(s',t), [\bar{K}p]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s',t), \sup_{u\in S} T(R(t,u), [p]_{M,u})) \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s',t), \max(\sup_{u\in S\setminus\{u'\}} T(R(t,u), 0), T(R(t,u'), 1)) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \text{ en eigenschap 3.1.1(2) } \rangle
\end{aligned}$$

$$= \inf_{t \in S} I_T(R(s',t), \max(\sup_{u \in S \setminus \{u'\}} 0, R(t,u'))$$
$$\langle \ \sup(0) = 0 \text{ en } R(t,u') \geq 0 \ \rangle$$
$$= \inf_{t \in S} I_T(R(s',t), R(t,u'))$$
$$\langle \text{ definitie infimum en } t' \in S \ \rangle$$
$$\leq I_T(R(s',t'), R(t',u')) \tag{5.7}$$

We bekomen voor de waarheidswaarde $[\bar{K}p \to K\bar{K}p]_{M,s'}$ m.b.v. de definitie van de implicatie:

$$[\bar{K}p \to K\bar{K}p]_{M,s'} = I_T([\bar{K}p]_{M,s'}, [K\bar{K}p]_{M,s'})$$
$$\langle \text{ (5.7) en } I_T \text{ stijgend in het tweede argument } \rangle$$
$$\leq I_T([\bar{K}p]_{M,s'}, I_T(R(s',t'), R(t',u')))$$
$$\langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle$$
$$= I_T(\sup_{t \in S} T(R(s',t), [p]_{M,t}), I_T(R(s',t'), R(t',u')))$$
$$\langle \text{ definitie } \pi' \ \rangle$$
$$= I_T(\max(\sup_{t \in S \setminus \{u'\}} T(R(s',t), 0), T(R(s',u'), 1)), I_T(R(s',t'), R(t',u')))$$
$$\langle \text{ randvoorwaarde } T \text{ en eigenschap 3.1.1(2) } \rangle$$
$$= I_T(\max(\sup_{t \in S \setminus \{u'\}} 0, R(s',u')), I_T(R(s',t'), R(t',u')))$$
$$\langle \ \sup(0) = 0 \text{ en } R(s',u') \geq 0 \ \rangle$$
$$= I_T(R(s',u'), I_T(R(s',t'), R(t',u')))$$
$$\langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle$$
$$= I_T(T(R(s',u'), R(s',t')), R(t',u'))$$
$$\langle \ T \text{ commutatief } \rangle$$
$$= I_T(T(R(s',t'), R(s',u')), R(t',u'))$$
$$\langle \text{ assumptie m.b.t. } R \text{ niet } T\text{-Euclidisch en eigenschap 3.1.9(1) } \rangle$$
$$< 1$$

Dit is in strijd met de onderstelling, dus moet R noodzakelijk T-Euclidisch zijn. □

In de volgende propositie tonen we aan dat axioma H en I gelden indien de toegankelijkheidsrelatie van het vaag Kripke model T-transitief is. Deze bewijzen (of een kernidee) worden niet gegeven in [14] (de auteurs verwijzen naar een ander artikel van hun hand), maar we werken de bewijzen zelf uit i.p.v. het referentie-artikel te gebruiken.

Propositie 5.2.10 (Voldoende voorwaarde axioma H en I [14])
In elk vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ met T-transitieve R geldt:

1. $M \models K\varphi \to KK\varphi, \forall \varphi \in L_A$,
2. $M \models \bar{K}\bar{K}\varphi \to \bar{K}\varphi, \forall \varphi \in L_A$.

Bewijs Zij $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ een willekeurig vaag Kripke model met T-transitieve toegankelijkheidsrelatie, s een willekeurige wereld uit S en φ een formule uit L_A. De T-transitiviteit van R houdt voor alle werelden s en t in dat

$$T(R(s,u), R(u,t)) \leq R(s,t), \forall u \in S \Rightarrow \sup_{u\in S} T(R(s,u), R(u,t)) \leq R(s,t). \tag{5.8}$$

1. We moeten bewijzen dat $[K\varphi \to KK\varphi]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie in een vaag Kripke model en eigenschap 3.1.9(1) is deze uitspraak equivalent met $[K\varphi]_{M,s} \leq [KK\varphi]_{M,s}$. M.b.v. de definitie van de kennisoperator bekomen we:

$$\begin{aligned}
[K\varphi]_{M,s} &= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ (5.8), } I_T \text{ dalend in eerste argument en infimum stijgend } \rangle \\
&\leq \inf_{t\in S} I_T(\sup_{u\in S} T(R(s,u), R(u,t)), [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(4) } \rangle \\
&= \inf_{t\in S}\inf_{u\in S} I_T(T(R(s,u), R(u,t)), [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\
&= \inf_{t\in S}\inf_{u\in S} I_T(R(s,u), I_T(R(u,t), [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.3(2) } \rangle \\
&= \inf_{u\in S}\inf_{t\in S} I_T(R(s,u), I_T(R(u,t), [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= \inf_{u\in S} I_T(R(s,u), \inf_{t\in S} I_T(R(u,t), [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= \inf_{u\in S} I_T(R(s,u), [K\varphi]_{M,u}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= [KK\varphi]_{M,s}
\end{aligned}$$

   Dit is wat we wouden aantonen.

2. We willen aantonen dat $[\bar{K}\bar{K}\varphi \to \bar{K}\varphi]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[\bar{K}\bar{K}\varphi]_{M,s} \leq [\bar{K}\varphi]_{M,s}$. M.b.v. de definitie van de duale kennisoperator bekomen we:

$$\begin{aligned}
[\bar{K}\varphi]_{M,s} &= \sup_{t\in S} T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ (5.8), } T \text{ en supremum stijgend } \rangle \\
&\geq \sup_{t\in S} T(\sup_{u\in S} T(R(s,u), R(u,t)), [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.2(1) } \rangle \\
&= \sup_{t\in S}\sup_{u\in S} T(T(R(s,u), R(u,t)), [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle\ T \text{ associatief } \rangle \\
&= \sup_{t\in S}\sup_{u\in S} T(R(s,u), T(R(u,t), [\varphi]_{M,t}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \text{ eigenschap 3.1.3(1) } \rangle\\
&= \sup_{u\in S}\sup_{t\in S} T(R(s,u), T(R(u,t), [\varphi]_{M,t}))\\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.2(1) } \rangle\\
&= \sup_{u\in S} T(R(s,u), \sup_{t\in S} T(R(u,t), [\varphi]_{M,t}))\\
&\langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle\\
&= \sup_{u\in S} T(R(s,u), [\bar{K}\varphi]_{M,u})\\
&\langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle\\
&= [\bar{K}\bar{K}\varphi]_{M,s}
\end{aligned}
$$

Dit is wat we wouden aantonen.

Het gestelde volgt uit het arbitrair zijn van s, M en φ. □

We kunnen ook aantonen dat T-transitiviteit van de toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is opdat de axioma's H en I zouden gelden in een vaag Kripke model.

Propositie 5.2.11 (Nodige voorwaarde axioma H en I [14])
Zij S een niet-ledige verzameling van mogelijke werelden, $R \in \mathcal{R}(S)$ een vage toegankelijkheidsrelatie en T een continue t-norm.

1. *Indien geldt dat*

$$M \models K\varphi \to KK\varphi, \forall\varphi \in L_A, \forall M = \langle S, \pi, R, T\rangle \ \textit{ met } \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk T-transitief.

2. *Indien geldt dat*

$$M \models \bar{K}\bar{K}\varphi \to \bar{K}\varphi, \forall\varphi \in L_A, \forall M = \langle S, \pi, R, T\rangle \ \textit{ met } \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk T-transitief.

Bewijs We bewijzen het gestelde door contrapositie, m.a.w. we onderstellen dat R niet T-transitief is. Stel daartoe dat er werelden s', t' en u' in S bestaan waarvoor $T(R(s',t'), R(t',u')) > R(s',u')$. Aangezien A niet-ledig is, bestaat er minstens één atomische propositie $p \in A$.

1. We beschouwen een interpretatie π' uit Π_S zodat

$$\pi'(s)(p) = R(s', s), \forall s \in S.$$

Aangezien $p \in A$ geldt $p \in L_A$. Per definitie is $M = \langle S, \pi', R, T\rangle$ een vaag Kripke model. Bij veronderstelling moet gelden dat

$$[Kp \to KKp]_{M,s} = 1, \forall s \in S \text{ dus i.h.b. } [Kp \to KKp]_{M,s'} = 1.$$

Omwille van de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[Kp]_{M,s'} \leq [KKp]_{M,s'}$. We tonen aan dat je het linkerlid echter kan bekomen door het rechterlid strikt te vergroten m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$[KKp]_{M,s'} = \inf_{t\in S} I_T(R(s',t), [Kp]_{M,t})$$

$$\begin{aligned}
&\langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s',t), \inf_{u\in S} I_T(R(t,u),[p]_{M,u})) \\
&\langle \text{ definitie } \pi' \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s',t), \inf_{u\in S} I_T(R(t,u),R(s',u))) \\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= \inf_{t\in S}\inf_{u\in S} I_T(R(s',t), I_T(R(t,u),R(s',u))) \\
&\langle \text{ definitie infimum, } t'\in S \text{ en } u'\in S \rangle \\
&\le I_T(R(s',t'), I_T(R(t',u'),R(s',u'))) \\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\
&= I_T(T(R(s',t'),R(t',u')),R(s',u')) \\
&\langle \text{ assumptie m.b.t. } R \text{ niet } T\text{-transitief en eigenschap 3.1.9(1) } \rangle \\
&< 1 \\
&\langle \text{ inf}(1)=1 \text{ en eigenschap 3.1.9(1) } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s',t),R(s',t)) \\
&\langle \text{ definitie } \pi' \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s',t),[p]_{M,t}) \\
&\langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= [Kp]_{M,s'}
\end{aligned}$$

Dit is in strijd met de onderstelling, dus moet R noodzakelijk T-transitief zijn.

2. We beschouwen een interpretatie π' uit Π_S zodat

$$\pi'(u')(p) = 1 \text{ en } \pi'(s)(p) = 0, \forall s \neq u'.$$

Aangezien $p \in A$ geldt $p \in L_A$. Per definitie is $M = \langle S, \pi', R, T\rangle$ een vaag Kripke model. Bij veronderstelling moet gelden dat

$$[\bar{K}\bar{K}p \to \bar{K}p]_{M,s} = 1, \forall s \in S \text{ dus i.h.b. } [\bar{K}\bar{K}p \to \bar{K}p]_{M,s'} = 1.$$

Omwille van de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[\bar{K}\bar{K}p]_{M,s'} \le [\bar{K}p]_{M,s'}$. We tonen aan dat je het rechterlid echter kan bekomen door het linkerlid strikt te verkleinen m.b.v. de definitie van de duale kennisoperator:

$$\begin{aligned}
[\bar{K}\bar{K}p]_{M,s'} &= \sup_{t\in S} T(R(s',t),[\bar{K}p]_{M,t}) \\
&\langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
&= \sup_{t\in S} T(R(s',t), \sup_{u\in S} T(R(t,u),[p]_{M,u})) \\
&\langle \text{ definitie } \pi' \rangle \\
&= \sup_{t\in S} T(R(s',t), \max(\sup_{u\in S\setminus\{u'\}} T(R(t,u),0), T(R(t,u'),1))) \\
&\langle \text{ randvoorwaarde } T \text{ en eigenschap 3.1.1(2) } \rangle \\
&= \sup_{t\in S} T(R(s',t), \max(\sup_{u\in S\setminus\{u'\}} 0, R(t,u')))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \langle \text{ sup}(0) = 0 \text{ en } R(t,u') \geq 0 \;\rangle \\
&= \sup_{t \in S} T(R(s',t), R(t,u')) \\
&\quad \langle \text{ definitie supremum en } t' \in S \;\rangle \\
&\geq T(R(s',t'), R(t',u')) \\
&\quad \langle \text{ assumptie m.b.t. } R \text{ niet } T\text{-transitief } \rangle \\
&> R(s',u') \\
&\quad \langle\; R(s',u') \geq 0 \;\rangle \\
&= \max(0, R(s',u')) \\
&\quad \langle \text{ sup}(0) = 0 \text{ en eigenschap 3.1.1(2) } \rangle \\
&= \max(\sup_{t \in S \setminus \{u'\}} T(R(s',t),0), R(s',u')) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \;\rangle \\
&= \max(\sup_{t \in S \setminus \{u'\}} T(R(s',t),0), T(R(s',u'),1)) \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \;\rangle \\
&= \sup_{t \in S} T(R(s',t), [p]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
&= [\bar{K}p]_{M,s'}
\end{aligned}
$$

Dit is in strijd met de onderstelling, dus moet R noodzakelijk T-transitief zijn. □

5.2.4 Axioma's vage S5

Indien we voor elk axioma en elke afleidingsregel uit axiomasysteem 5.2.3 (vage **S5**) waarin modale operatoren voorkomen een voorwaarde op de toegankelijkheidsrelatie kunnen vinden waaronder het axioma in kwestie nog geldt voor onze specifieke klasse vage Kripke modellen, kunnen we het volledigheidsresultaat uit [11] overnemen. We moeten dan de strengste voorwaarden bundelen, zodanig dat onze klasse vage Kripke modellen aan alle axioma's voldoet. In dat geval zou vage **S5** correct en volledig zijn met betrekking tot die klasse vage Kripke modellen. Alles wat geldig is in elk model van de klasse vage Kripke modellen volgens definitie 4.2.3 (met $T \in \mathcal{T}_c$ en I_T) bevat dan alles wat geldig is in de vage Kripke modellen volgens definitie 4.2.1 (met $T \in \mathcal{T}_c$ en I_T). Anders geformuleerd zijn de tautologieën in ons werk een deel van de tautologieën in [10, 11]. Aangezien in [11] reeds aangetoond werd dat alle tautologieën stellingen zijn van vage **S5**, zal dat a fortiori ook gelden voor een deel van die tautologieën. Deze methode werkt natuurlijk enkel indien het axiomastelsel ongewijzigd is en op voorwaarde dat Hájeks klasse vage Kripke modellen deel uitmaakt van onze klasse vage Kripke modellen. Hiervoor moet gelden dat de toegankelijkheidsrelatie uit [10] deel uitmaakt van de klasse toegankelijkheidsrelaties die wij toestaan. De toegankelijkheidsrelatie uit [10] is $R = S \times S$ met S de verzameling werelden m.a.w. R is identisch 1. Van de mogelijke voorwaarden (zie definitie 3.1.14) op vaagrelaties sluit dit dus irreflexiviteit en rechtse N-assymetrie uit. De vaagrelatie uit [10] is wel degelijk zwak irreflexief, maar aangezien uit propositie 5.2.4 blijkt dat het wenselijk is om reflexiviteit te eisen, zou de combinatie van deze eigenschappen enkel terugleiden tot $R = S \times S$, wat dus weinig zinvol is. Onze opties zijn dus nog serialiteit, (zwakke) reflexiviteit, symmetrie, T-transitiviteit, T-Eucliditeit, T-cotransitiviteit en linkse N-asymmetrie. De linkse N-asymmetrie zou wel een contra-intuïtieve voorwaarde zijn met het oog op toepassingen, maar wiskundig gezien is er geen reden om deze eigenschap uit te sluiten.

Om een idee te krijgen welke axioma's van vage **S5** zouden kunnen gelden onder bepaalde voorwaarden en vooral om zekerheid te krijgen welke voorwaarden onvoldoende zijn, gaan we de geldigheid van deze en nog enkele extra axioma's na in een Matlab-experiment waarin we automatisch voorbeelden en tegenvoorbeelden proberen te genereren.

We stellen $A = \{p, q, r\}$ en $S = \{s, t, u, v, w\}$. Voor verdere informatie verwijzen we naar sectie A.1 van de appendix. We gebruiken achtereenvolgens volgende vaagrelaties.

- $R0$: een zwak reflexieve vaagrelatie,
- $R1$: een reflexieve (en dus ook seriële), niet-symmetrische vaagrelatie,
- $R2$: een seriële, niet-symmetrische vaagrelatie,
- $R3$: een symmetrische, niet-seriële vaagrelatie,
- $R4$: een symmetrische, seriële vaagrelatie,
- $R5$: een symmetrische, reflexieve vaagrelatie,
- $R6$: een T-Euclidische, symmetrische (en dus T-transitieve) vaagrelatie (identisch),
- $R7$: een reflexieve, symmetrische en T-transitieve (en dus T-Euclidische) vaagrelatie,
- $R8$: een vaagrelatie zonder bijzondere eigenschappen,
- $R9$: de vaagrelatie uit [10,11] ($S \times S$),
- $R10$: een scherpe vaagrelatie,
- $R11$: een vaagrelatie die op 1 waarde na scherp is,
- $R12$: een vaagrelatie die op 1 waarde na identisch is.

Als we spreken van T-transitiviteit of T-Eucliditeit bedoelen we dat dit geldt m.b.t. een gebruikte t-norm, nl. $T = T_L$, $T = T_P$ of $T = T_M$. Voor de exacte waarden van de vaagrelaties verwijzen we eveneens naar sectie A.1 van de appendix.

Opmerking 5.2.5
In het experiment zien we effectief dat de axioma-instanties van vage **S5** steeds waarheidswaarde 1 hebben indien we de toegankelijkheidsrelatie $R = S \times S$ hanteren. Dit was te verwachten aangezien de geldigheid van deze axioma's in [10] reeds bewezen werd voor vage Kripke modellen met deze toegankelijkheidsrelatie. □

We voeren ons experiment 500 maal uit door enerzijds 3 verschillende t-normen te gebruiken (de Łukasiewicz t-norm, het algebraïsch product en het minimum) en anderzijds verschillende waarheidswaarden voor de atomische proposities te genereren. In sectie A.1 van de appendix worden de resultaten van deze uitvoeringen weergegeven in een tabel die vermeldt voor welke vaagrelaties de axioma-instanties geldig waren (dit wil natuurlijk nog niet zeggen dat het axioma algemeen geldig is). Enkel de vaagrelaties die telkens de waarde 1 opleverden, komen nog in aanmerking om een voldoende voorwaarde te zijn. Alle anderen kunnen met zekerheid geëlimineerd worden. In tabel A.1 uit sectie A.1 van de appendix wordt dit weergegeven. Wat direct duidelijk is, is dat de enige mogelijke voldoende voorwaarde (uit degene die we testten) voor axioma's 5(a) en 5(b) van vage **S5** terug $R = S \times S$ is, m.a.w. we vinden geen echte uitbreiding. Als we dus een axiomasysteem willen vinden dat correct en volledig is t.o.v. een klasse vage Kripke modellen met een vage toegankelijkheidsrelatie die zich niet beperkt tot $R = S \times S$, zal dit de axioma's 5(a) en 5(b) niet bevatten. Dit betekent helaas dat het volledigheidsresultaat uit [11] niet kan worden overgenomen (dit zou enkel mogelijk zijn als we hetzelfde axiomastelsel hebben). In elk geval is deze piste verkend, ook al is het met een negatief resultaat. Geïnspireerd door de resultaten van ons experiment, tonen we in de volgende proposities aan welke voorwaarden voldoende zijn van axioma's 3 t.e.m. 6 uit vage **S5**.

Propositie 5.2.12 (Voldoende voorwaarde axioma 3(a) en 3(b))
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met een toegankelijkheidsrelatie $R \equiv a$, $a \in [0,1]$, geldt:

1. $M \models K(K\psi \to \varphi) \to (K\psi \to K\varphi), \forall \varphi, \psi \in L_A$,
2. $M \models K(\bar{K}\psi \to \varphi) \to (\bar{K}\psi \to K\varphi), \forall \varphi, \psi \in L_A$.

Bewijs We fixeren een willekeurig element a uit het eenheidsinterval. Zij $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ een willekeurig vaag Kripke model met toegankelijkheidsrelatie $R \equiv a$. D.w.z. dat $R(t, u) = a$ voor elke $t, u \in S$. Verder is s een willekeurige wereld uit S en zijn φ en ψ formules uit L_A. M.b.v. de definitie van de kennisoperator berekenen we op voorhand:

$$\begin{aligned}
[K\varphi]_{M,s} &= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle\ R \equiv a\ \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(a, [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= I_T(a, \inf_{t\in S} [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie modellering } \rangle \\
&= I_T(a, [\varphi]_M)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Op analoge wijze en steunend op de definitie van de duale kennisoperator bekomen we:

$$\begin{aligned}
[\bar{K}\varphi]_{M,s} &= \sup_{t\in S} T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle\ R \equiv a\ \rangle \\
&= \sup_{t\in S} T(a, [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.2(1) } \rangle \\
&= T(a, \sup_{t\in S} [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ notatie-afspraak } \langle\varphi\rangle_M := \sup_{t\in S} [\varphi]_{M,t}\ \rangle \\
&= T(a, \langle\varphi\rangle_M)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Merk op dat hieruit volgt dat de waarheidswaarde van formules die beginnen met een modale operator in elke wereld gelijk zijn.

1. We moeten bewijzen dat $[K(K\psi \to \varphi) \to (K\psi \to K\varphi)]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie in een vaag Kripke model en eigenschap 3.1.9(1) is deze uitspraak equivalent met aantonen dat $[K(K\psi \to \varphi)]_{M,s} \leq [K\psi \to K\varphi]_{M,s}$. Enerzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$\begin{aligned}
[K(K\psi \to \varphi)]_{M,s} &= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [K\psi \to \varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), I_T([K\psi]_{M,t}, [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle\ R \equiv a\ \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(a, I_T([K\psi]_{M,t}, [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= I_T(a, \inf_{t\in S} I_T([K\psi]_{M,t}, [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle\ (5.9)\ \rangle \\
&= I_T(a, \inf_{t\in S} I_T(I_T(a, [\psi]_M), [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= I_T(a, I_T(I_T(a, [\psi]_M), \inf_{t\in S} [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie modellering } \rangle \\
&= I_T(a, I_T(I_T(a, [\psi]_M), [\varphi]_M)) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\
&= I_T(T(a, I_T(a, [\psi]_M)), [\varphi]_M)
\end{aligned}$$

Anderzijds volgt uit de definitie van de implicatie:

$$\begin{aligned}
[K\psi \to K\varphi)]_{M,s} &= I_T([K\psi]_{M,t}, [K\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle\ (5.9)\ \rangle \\
&= I_T([K\psi]_{M,t}, I_T(a, [\varphi]_M)) \\
&\quad \langle\ (5.9)\ \rangle \\
&= I_T(I_T(a, [\psi]_M), I_T(a, [\varphi]_M)) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\
&= I_T(T(I_T(a, [\psi]_M), a), [\varphi]_M)
\end{aligned}$$

Aangezien T commutatief is, zien we dat beide uitdrukkingen gelijk zijn.

2. We tonen aan dat $[K(\bar{K}\psi \to \varphi) \to (\bar{K}\psi \to K\varphi)]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[K(\bar{K}\psi \to \varphi)]_{M,s} \leq [\bar{K}\psi \to K\varphi]_{M,s}$. Enerzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de duale kennisoperator:

$$\begin{aligned}
[K(\bar{K}\psi \to \varphi)]_{M,s} &= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\bar{K}\psi \to \varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), I_T([\bar{K}\psi]_{M,t}, [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle\ R \equiv a\ \rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf_{t\in S} I_T(a, I_T([\bar{K}\psi]_{M,t}, [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= I_T(a, \inf_{t\in S} I_T([\bar{K}\psi]_{M,t}, [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ (5.10) } \rangle \\
&= I_T(a, \inf_{t\in S} I_T(T(a, \langle\psi\rangle_M), [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= I_T(a, I_T(T(a, \langle\psi\rangle_M), \inf_{t\in S} [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie modellering } \rangle \\
&= I_T(a, I_T(T(a, \langle\psi\rangle_M), [\varphi]_M))
\end{aligned}
$$

Anderzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de implicatie:

$$
\begin{aligned}
[\bar{K}\psi \to K\varphi)]_{M,s} &= I_T([\bar{K}\psi]_{M,t}, [K\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ (5.9) } \rangle \\
&= I_T([\bar{K}\psi]_{M,t}, I_T(a, [\varphi]_M)) \\
&\quad \langle \text{ (5.10) } \rangle \\
&= I_T(T(a, \langle\psi\rangle_M), I_T(a, [\varphi]_M)) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\
&= I_T(a, I_T(\langle\psi\rangle_M, I_T(a, [\varphi]_M))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\
&= I_T(a, I_T(T(\langle\psi\rangle_M, a), [\varphi]_M))
\end{aligned}
$$

Aangezien T commutatief is, zien we dat beide uitdrukkingen gelijk zijn.

Het gestelde volgt uit het arbitrair zijn van s, M, φ en ψ. □

Opmerking 5.2.6
Uit het bewijs van propositie 5.2.12 volgt wegens opmerking 4.2.2(2) dat onder de vermelde voorwaarden de sterkere uitdrukkingen

$$K(K\psi \to \varphi) \leftrightarrow (K\psi \to K\varphi) \text{ en } K(\bar{K}\psi \to \varphi) \leftrightarrow (\bar{K}\psi \to K\varphi)$$

gelden. □

Uiteraard is een toegankelijkheidsrelatie R die overal dezelfde waarde heeft weinig nuttig in praktische toepassingen. Eén van de meest strikte voorwaarden op een vaagrelatie R (zonder ze onbruikbaar te maken voor toepassingen of in het scherpe geval te belanden) is T-equivalentie. M.b.v. een voorbeeld tonen we aan dat de axioma's 3(a) en 3(b) niet noodzakelijk gelden in een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ indien de toegankelijkheidsrelatie R een T-equivalentierelatie is. We genereren voorbeelden m.b.v. Matlab (de code hiervoor is te zien in sectie A.2 van de appendix) tot wanneer we een voorbeeld gevonden hebben waar instanties van de axioma's niet gelden.

Voorbeeld 11
Veronderstel $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met:

- $A = \{p, q\}$,

- $S = \{s, t\}$,
$\pi(.)(.)$	s	t
p	0.8	0
q	0.9	0.3

  ,
$R(.,.)$	s	t
s	1	0.5
t	0.5	1

  ,
- $T = T_L$.

Visueel kunnen we deze informatie samenvatten m.b.v. een schema. Aangezien we met een T_L-equivalentierelatie R werken, weten we dat R i.h.b. symmetrisch is. Daarom zullen we slechts één dubbele pijl met één corresponderende toegankelijkheidsgraad tekenen tussen twee verschillende werelden.

Het manueel berekenen van de waarheidswaarden van axioma-instanties wordt snel omslachtig. Men moet eerst volgende waarheidswaarden berekenen:

$[.]_{M,.}$	s	t
Kp	0.5	0
Kq	0.8	0.3
$\bar{K}q$	0.9	0.4
$Kq \to p$	1	0.7
$\bar{K}q \to p$	0.9	0.6

De effectieve manuele berekeningen laten we achterwege omdat dit te veel onnodige ruimte zou innemen. Eenmaal deze waarden berekend zijn, kan je achtereenvolgens berekenen:

$$\begin{aligned}
[K(Kq \to p)]_{M,s} &= \min(I_L(R(s,s),[Kq \to p]_{M,s}), I_L(R(s,t),[Kq \to p]_{M,t})) \\
&= \min(\min(1-1+1;1), \min(1-0.5+0.7;1)) = \min(1,1) = 1, \\
[Kq \to Kp]_{M,s} &= I_L([Kq]_{M,s},[Kp]_{M,s}) = \min(1-0.8+0.5;1) = 0.7 \\
&\Rightarrow [K(Kq \to p) \to (Kq \to Kp)]_{M,s} = \min(1-1+0.7,1) = 0.7 \\
[K(\bar{K}q \to p)]_{M,s} &= \min(I_L(R(s,s),[\bar{K}q \to p]_{M,s}), I_L(R(s,t),[\bar{K}q \to p]_{M,t})) \\
&= \min(\min(1-1+0.9;1), \min(1-0.5+0.6;1)) = \min(0.9,1) = 0.9, \\
[\bar{K}q \to Kp]_{M,s} &= I_L([\bar{K}q]_{M,s},[Kp]_{M,s}) = \min(1-0.9+0.5;1) = 0.6 \\
&\Rightarrow [K(\bar{K}q \to p) \to (\bar{K}q \to Kp)]_{M,s} = \min(1-0.9+0.6,1) = 0.7
\end{aligned}$$

Het mag duidelijk wezen dat dit inderdaad als een omslachtige berekening kan beschouwd worden. M.b.v. Matlab kan je gelukkig sneller nagaan dat

$$[K(Kq \to p) \to (Kq \to Kp)]_{M,s} = 0.7 \text{ en } [K(\bar{K}q \to p) \to (\bar{K}q \to Kp)]_{M,s} = 0.7.$$

Axioma 3(a) en axioma 3(b) zijn dus niet geldig in dit vaag Kripke model met R een T_L-equivalentierelatie. Anders gezegd is T-equivalentie van de toegankelijkheidsrelatie geen voldoende voorwaarde opdat deze axioma's zouden gelden. $\square$

Propositie 5.2.13 (Voldoende voorwaarde axioma 4(a) en 4(b))
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met een toegankelijkheidsrelatie $R \equiv a$, $a \in [0,1]$, geldt:

1. $M \models K(\varphi \to K\psi) \to (\bar{K}\varphi \to K\psi), \forall \varphi, \psi \in L_A$,
2. $M \models K(\varphi \to \bar{K}\psi) \to (\bar{K}\varphi \to \bar{K}\psi), \forall \varphi, \psi \in L_A$.

Bewijs We fixeren een willekeurig element a uit het eenheidsinterval. Zij $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ een willekeurig vaag Kripke model met toegankelijkheidsrelatie $R \equiv a$. D.w.z. dat $R(t,u) = a$ voor elke $t, u \in S$. Verder is s een willekeurige wereld uit S en zijn φ en ψ formules uit L_A.

1. We moeten bewijzen dat $[K(\varphi \to K\psi) \to (\bar{K}\varphi \to K\psi)]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie in een vaag Kripke model en eigenschap 3.1.9(1) is deze uitspraak equivalent met $[K(\varphi \to K\psi)]_{M,s} \le [\bar{K}\varphi \to K\psi]_{M,s}$. Enerzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$\begin{aligned}
[K(\varphi \to K\psi)]_{M,s} &= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi \to K\psi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), I_T([\varphi]_{M,t}, [K\psi]_{M,t})) \\
&\quad \langle\ R \equiv a\ \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(a, I_T([\varphi]_{M,t}, [K\psi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= I_T(a, \inf_{t\in S} I_T([\varphi]_{M,t}, [K\psi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ (5.9) } \rangle \\
&= I_T(a, \inf_{t\in S} I_T([\varphi]_{M,t}, I_T(a, [\psi]_M))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(4) } \rangle \\
&= I_T(a, I_T(\sup_{t\in S} [\varphi]_{M,t}, I_T(a, [\psi]_M))) \\
&\quad \langle \text{ notatie-afspraak } \rangle \\
&= I_T(a, I_T(\langle\varphi\rangle_{M,}, I_T(a, [\psi]_M)))
\end{aligned}$$

Anderzijds volgt uit de definitie van de implicatie:

$$\begin{aligned}
[\bar{K}\varphi \to K\psi]_{M,s} &= I_T([\bar{K}\varphi]_{M,t}, [K\psi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ (5.9) } \rangle \\
&= I_T([\bar{K}\varphi]_{M,t}, I_T(a, [\psi]_M)) \\
&\quad \langle \text{ (5.10) } \rangle \\
&= I_T(T(a, \langle\varphi\rangle_M), I_T(a, [\psi]_M)) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle
\end{aligned}$$

$$= I_T(a, I_T(\langle\varphi\rangle_M, I_T(a, [\psi]_M)))$$

We zien dat beide uitdrukkingen gelijk zijn.

2. We willen aantonen dat $[K(\varphi \to \bar{K}\psi) \to (\bar{K}\varphi \to \bar{K}\psi)]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[K(\varphi \to \bar{K}\psi)]_{M,s} \leq [\bar{K}\varphi \to \bar{K}\psi]_{M,s}$. Enerzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$\begin{aligned}
[K(\varphi \to \bar{K}\psi)]_{M,s} &= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi \to \bar{K}\psi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), I_T([\varphi]_{M,t}, [\bar{K}\psi]_{M,t})) \\
&\quad \langle\ R \equiv a\ \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(a, I_T([\varphi]_{M,t}, [\bar{K}\psi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= I_T(a, \inf_{t\in S} I_T([\varphi]_{M,t}, [\bar{K}\psi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ (5.10) } \rangle \\
&= I_T(a, \inf_{t\in S} I_T([\varphi]_{M,t}, T(a, \langle\psi\rangle_M))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(4) } \rangle \\
&= I_T(a, I_T(\sup_{t\in S} [\varphi]_{M,t}, T(a, \langle\psi\rangle_M))) \\
&\quad \langle \text{ notatie-afspraak } \rangle \\
&= I_T(a, I_T(\langle\varphi\rangle_{M,}, T(a, \langle\psi\rangle_M)))
\end{aligned}$$

Anderzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de implicatie:

$$\begin{aligned}
[\bar{K}\varphi \to \bar{K}\psi)]_{M,s} &= I_T([\bar{K}\varphi]_{M,t}, [\bar{K}\psi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ (5.10) } \rangle \\
&= I_T(T(a, \langle\varphi\rangle_M), T(a, \langle\psi\rangle_M)) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\
&= I_T(a, I_T(\langle\varphi\rangle_M, T(a, \langle\psi\rangle_M)))
\end{aligned}$$

We zien dat beide uitdrukkingen gelijk zijn.

Het gestelde volgt uit het arbitrair zijn van s, M, φ en ψ. □

Opmerking 5.2.7
Uit het bewijs van propositie 5.2.13 volgt wegens opmerking 4.2.2(2) dat onder de vermelde voorwaarden de sterkere uitdrukkingen

$$K(\varphi \to K\psi) \leftrightarrow (\bar{K}\varphi \to K\psi) \text{ en } K(\varphi \to \bar{K}\psi) \leftrightarrow (\bar{K}\varphi \to \bar{K}\psi)$$

gelden. □

Ook hier tonen we a.d.h.v. een voorbeeld aan dat de axioma's 4(a) en 4(b) niet noodzakelijk gelden in een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ indien de toegankelijkheidsrelatie R een T-equivalentierelatie is.

Voorbeeld 12
Veronderstel $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met:

- $A = \{p, q\}$,
- $S = \{s, t\}$,
-

$\pi(.)(.)$	s	t
p	0.1	0.8
q	0.1	0.5

,

-

$R(.,.)$	s	t
s	1	0.5
t	0.5	1

,

- $T = T_L$.

Visueel kunnen we deze informatie samenvatten m.b.v. onderstaand schema. Zoals in voorbeeld 11 zullen we wegens de symmetrie van R slechts één dubbele pijl tekenen tussen twee verschillende werelden.

M.b.v. Matlab kan je nagaan dat

$$[K(p \to Kq) \to (\bar{K}p \to Kq)]_{M,s} = 0.8 \text{ en } [K(p \to \bar{K}q) \to (\bar{K}p \to \bar{K}q)]_{M,s} = 0.8.$$

Axioma 4(a) en axioma 4(b) zijn dus duidelijk niet geldig in dit vaag Kripke model met T_L-equivalentierelatie als toegankelijkheidsrelatie. □

Propositie 5.2.14 (Voldoende voorwaarde axioma 5(a) en 5(b))
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met een toegankelijkheidsrelatie $R \equiv 1$ geldt:

1. $M \models K(\varphi \vee K\psi) \to (K\varphi \vee K\psi), \forall \varphi, \psi \in L_A$,
2. $M \models K(\varphi \vee \bar{K}\psi) \to (K\varphi \vee \bar{K}\psi), \forall \varphi, \psi \in L_A$.

Bewijs Zij $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ een willekeurig vaag Kripke model met toegankelijkheidsrelatie $R \equiv 1$ (of equivalent $R = S \times S$) en s een willekeurige wereld uit S. Uit opmerking 4.2.1 en a.d.h.v. vorige notatie-afspraken weten we dat

$$[K\varphi]_{M,s} = \inf_{t \in S} [\varphi]_{M,t} = [\varphi]_M \text{ en } [\bar{K}\varphi]_{M,s} = \sup_{t \in S} [\varphi]_{M,t} = \langle \varphi \rangle_M, \forall \varphi \in L_A. \tag{5.11}$$

We onderstellen dat φ en ψ arbitraire formules zijn uit de vaagmodale taal L_A.

1. We willen aantonen dat $[K(\varphi \vee K\psi) \to (K\varphi \vee K\psi)]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[K(\varphi \vee K\psi)]_{M,s} \leq$

$[K\varphi \vee K\psi]_{M,s}$. We werken beide waarheidswaarden uit. Enerzijds bekomen we m.b.v. (5.11):

$$\begin{aligned}
[K(\varphi \vee K\psi)]_{M,s} &= \inf_{t\in S} [\varphi \vee K\psi]_{M,t} \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 4.2.1(3) } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} \max([\varphi]_{M,t}, [K\psi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ (5.11) } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} \max([\varphi]_{M,t}, [\psi]_M) \\
&\quad \langle \text{ max stijgend en continu, } [\psi]_M \text{ onafhankelijk van } t \rangle \\
&= \max(\inf_{t\in S} [\varphi]_{M,t}, [\psi]_M) \\
&\quad \langle \text{ definitie modellering } \rangle \\
&= \max([\varphi]_M, [\psi]_M)
\end{aligned}$$

Anderzijds bekomen we m.b.v. eigenschap 4.2.1(3):

$$\begin{aligned}
[K\varphi \vee K\psi]_{M,s} &= \max([K\varphi]_{M,s}, [K\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ (5.11) } \rangle \\
&= \max([\varphi]_M, [\psi]_M)
\end{aligned}$$

We zien dat beide uitdrukkingen gelijk zijn.

2. We willen aantonen dat $[K(\varphi \vee \bar{K}\psi) \rightarrow (K\varphi \vee \bar{K}\psi)]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[K(\varphi \vee \bar{K}\psi)]_{M,s} \leq [K\varphi \vee \bar{K}\psi]_{M,s}$. We werken beide waarheidswaarden uit. Enerzijds bekomen we m.b.v. (5.11):

$$\begin{aligned}
[K(\varphi \vee \bar{K}\psi)]_{M,s} &= \inf_{t\in S} [\varphi \vee \bar{K}\psi]_{M,t} \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 4.2.1(3) } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} \max([\varphi]_{M,t}, [\bar{K}\psi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ (5.11) } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} \max([\varphi]_{M,t}, \langle\psi\rangle_M) \\
&\quad \langle \text{ max stijgend en continu, } \langle\psi\rangle_M \text{ onafhankelijk van } t \rangle \\
&= \max(\inf_{t\in S} [\varphi]_{M,t}, \langle\psi\rangle_M) \\
&\quad \langle \text{ definitie modellering } \rangle \\
&= \max([\varphi]_M, \langle\psi\rangle_M)
\end{aligned}$$

Anderzijds bekomen we m.b.v. eigenschap 4.2.1(3):

$$\begin{aligned}
[K\varphi \vee \bar{K}\psi]_{M,s} &= \max([K\varphi]_{M,s}, [\bar{K}\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ (5.11) } \rangle \\
&= \max([\varphi]_M, \langle\psi\rangle_M)
\end{aligned}$$

We zien dat beide uitdrukkingen gelijk zijn.

Het gestelde volgt uit het arbitrair zijn van s, M, φ en ψ. □

Opmerking 5.2.8

1. Uit het bewijs van propositie 5.2.14 volgt wegens opmerking 4.2.2(2) dat onder de vermelde voorwaarden de sterkere uitdrukkingen

$$K(\varphi \vee K\psi) \leftrightarrow (K\varphi \vee K\psi) \text{ en } K(\varphi \vee \bar{K}\psi) \leftrightarrow (K\varphi \vee \bar{K}\psi)$$

   gelden.

2. Het sterkere axioma $K(\varphi \vee \psi) \rightarrow (K\varphi \vee \psi)$ (merk op dat axioma 5(a) en 5(b) hier speciale gevallen van zijn) geldt niet. De sleutel van de bewijzen ligt hier namelijk in het feit dat de waarheidswaarde van een formule die begint met een modale operator onafhankelijk is van de wereld waarin we deze berekenen (i.e. $[K\varphi]_{M,s}$ is onafhankelijk van s, net als $[\bar{K}\varphi]_{M,s}$, zoals duidelijk te zien is in (5.11)). Dit geldt niet voor formules in andere gedaantes. □

Opnieuw tonen we a.d.h.v. een voorbeeld aan dat de axioma's 5(a) en 5(b) niet noodzakelijk gelden in een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ indien de toegankelijkheidsrelatie R een T-equivalentierelatie is. Uit het de resultaten van het Matlabexperiment blijkt ook dat, in tegenstelling tot axioma's 3(a), 3(b), 4(a) en 4(b), $R \equiv a$ met $a \in [0, 1]$ geen voldoende voorwaarde is op de toegankelijkheidsrelatie opdat de axioma's 5(a) en 5(b) zouden gelden. Dit volgt uit het feit dat sommige instanties van de axioma's 5(a) en 5(b) niet waarheidswaarde 1 opleverden bij de toegankelijkheidsrelatie $R6 \equiv 0.5$ (zie sectie A.1 van de appendix). We geven hier echter geen expliciet voorbeeld van.

Voorbeeld 13
Veronderstel $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ met:

- $A = \{p, q\}$,
- $S = \{s, t\}$,
-

$\pi(.)(.)$	s	t
p	0.9	0.3
q	0.2	0.8

,

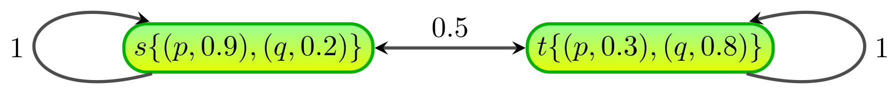
-

$R(.,.)$	s	t
s	1	0.5
t	0.5	1

,

- $T = T_L$.

Visueel kunnen we deze informatie samenvatten m.b.v. onderstaand schema. Zoals in voorbeeld 11 zullen we wegens de symmetrie van R slechts 1 dubbele pijl tekenen tussen 2 verschillende werelden.



M.b.v. Matlab kan je nagaan dat

$$[K(p \vee Kq) \rightarrow (Kp \vee Kq)]_{M,s} = 0.9 \text{ en } [K(p \vee \bar{K}q) \rightarrow (Kp \vee \bar{K}q)]_{M,s} = 0.9.$$

Axioma 5(a) en axioma 5(b) zijn dus duidelijk niet geldig in dit vaag Kripke model met T_L-equivalentierelatie als toegankelijkheidsrelatie. □

Propositie 5.2.15 (Voldoende voorwaarde axioma 6)
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ geldt:

1. $M \models (\bar{K}\varphi \& \bar{K}\varphi) \rightarrow \bar{K}(\varphi \& \varphi), \forall \varphi \in L_A$,

en indien de toegankelijkheidsrelatie R scherp is geldt:

2. $M \models (\bar{K}\varphi \& \bar{K}\varphi) \leftrightarrow \bar{K}(\varphi \& \varphi), \forall \varphi \in L_A$.

Bewijs Zij $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ een willekeurig vaag Kripke model met vage toegankelijkheidsrelatie R, s een willekeurig wereld uit S en φ een formule uit L_A.

1. We moeten bewijzen dat $[(\bar{K}\varphi \& \bar{K}\varphi) \rightarrow \bar{K}(\varphi \& \varphi)]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) kan men dit omvormen tot de equivalente voorwaarde $[\bar{K}\varphi \& \bar{K}\varphi]_{M,s} \leq [\bar{K}(\varphi \& \varphi)]_{M,s}$. Enerzijds maken we gebruik van de definitie van de duale kennisoperator:

$$\begin{aligned}
[\bar{K}(\varphi \& \varphi)]_{M,s} &= \sup_{t \in S} T(R(s,t), [\varphi \& \varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie sterke conjunctie } \rangle \\
&= \sup_{t \in S} T(R(s,t), T([\varphi]_{M,t}, [\varphi]_{M,t}))
\end{aligned}$$

   Anderzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de sterke conjunctie:

$$\begin{aligned}
[\bar{K}\varphi \& \bar{K}\varphi]_{M,s} &= T([\bar{K}\varphi]_{M,s}, [\bar{K}\varphi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
&= T(\sup_{t \in S} T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), \sup_{t \in S} T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(7) } \rangle \\
&= \sup_{t \in S} T(T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.1(4) } \rangle \\
&= \sup_{t \in S} T(T(R(s,t), R(s,t)), T([\varphi]_{M,t}, [\varphi]_{M,t}))
\end{aligned}$$

   Uit eigenschap 3.1.9(19) weten we:

$$T(R(s,t), R(s,t)) \leq R(s,t).$$

   Uit het stijgend zijn van T en het supremum volgt het gestelde.

2. We nemen aan dat R een scherpe relatie is. We moeten bewijzen dat $[(\bar{K}\varphi \& \bar{K}\varphi) \leftrightarrow \bar{K}(\varphi \& \varphi)]_{M,s} = 1$. Wegens opmerking 4.2.2(2) is dit equivalent met $[(\bar{K}\varphi \& \bar{K}\varphi) \rightarrow \bar{K}(\varphi \& \varphi)]_{M,s} = 1$ en $[\bar{K}(\varphi \& \varphi) \rightarrow (\bar{K}\varphi \& \bar{K}\varphi)]_{M,s} = 1$. Het eerste volgt uit het

vorige puntje en het feit dat elke scherpe relatie i.h.b. een vage relatie is. Het tweede is wegens de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) equivalent met $[\bar{K}\varphi\&\bar{K}\varphi]_{M,s} \geq [\bar{K}(\varphi\&\varphi)]_{M,s}$. We onderstellen dat R scherp is, bijgevolg is $R(s,t) \in \{0,1\}$, $\forall s,t \in S$. Aangezien $T(0,0) = 0$ wegens eigenschap 3.1.1(2) en $T(1,1) = 1$ wegens de randvoorwaarde van een t-norm, zien we dat $T(R(s,t), R(s,t)) = R(s,t), \forall s,t \in S$. Als we dit combineren met de uitwerkingen uit het eerste puntje, volgt direct het gestelde.

Aangezien s, M en φ willekeurig zijn, is de propositie bewezen. □

We kunnen niet bewijzen dat een scherpe toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is opdat axioma 6 zou gelden, toch niet in de zin van (5.3):

$$\forall S \neq \phi, \forall T \in \mathcal{T}_c : (\forall \pi \in \Pi_S : \langle S, \pi, R, T\rangle \models \alpha) \Rightarrow R \text{ heeft eigenschap } P$$

om de simpele reden dat dit niet geldt. Uit het bewijs van propositie 5.2.15(1) is namelijk duidelijk te zien dat voor een continue t-norm met de eigenschap dat $T(a,a) = a, \forall a \in [0,1]$ geldt dat

$$\begin{aligned}[\bar{K}\varphi\&\bar{K}\varphi]_{M,s} &= \sup_{t\in S} T(T(R(s,t), R(s,t)), T([\varphi\&\varphi]_{M,s})) = \sup_{t\in S} T(R(s,t), T([\varphi\&\varphi]_{M,s})) \\ &= [\bar{K}(\varphi\&\varphi)]_{M,s}\end{aligned}$$

voor elke s en M. Bijgevolg geldt axioma 6 voor elk vaag Kripke model dat zo'n t-norm hanteert, onafhankelijk van de toegankelijkheidsrelatie. De eigenschap $T(a,a) = a$, $\forall a \in [0,1]$ houdt in dat elk element uit het eenheidsinterval een idempotent element is van T (zie definitie 3.1.6). Uit eigenschap 3.1.4(2) weten we dat het minimum de enige t-norm is die hieraan voldoet. M.a.w. voor elke vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T_M\rangle$ is axioma 6 geldig zonder enige nodige voorwaarde op de toegankelijkheidsrelatie R. Bijgevolg is er voor dit axioma geen enkele nodige voorwaarde op de toegankelijkheidsrelatie R die voor elke continue t-norm geldt. We kunnen wel een zwakkere variant van nodige voorwaarde aantonen, nl.

$$\forall S \neq \phi : (\forall T \in \mathcal{T}_c, \forall \pi \in \Pi_S : \langle S, \pi, R, T\rangle \models \alpha) \Rightarrow R \text{ heeft eigenschap } P. \tag{5.12}$$

Meer specifiek zullen dit bewijzen door aan te tonen dat voor elke Archimedische t-norm (zie definitie 3.1.7) geldt:

$$\begin{gathered}\forall S \neq \phi, \forall T \in \mathcal{T}_c \text{ met } T \text{ Archimedisch :} \\ (\forall \pi \in \Pi_S : \langle S, \pi, R, T\rangle \models \textit{ axioma } 6) \Rightarrow R \textit{ is scherp.}\end{gathered}$$

Propositie 5.2.16 (Nodige voorwaarde axioma 6)
Zij S een niet-ledige verzameling van mogelijke werelden, $R \in \mathcal{R}(S)$ een vage toegankelijkheidsrelatie en T een Archimedische t-norm. Indien geldt dat

$$M \models (\bar{K}\varphi\&\bar{K}\varphi) \leftrightarrow \bar{K}(\varphi\&\varphi), \forall \varphi \in L_A, \forall M = \langle S, \pi, R, T\rangle \textit{ met } \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk scherp.

Bewijs Bij onderstelling moet voor elke formule φ en alle vage Kripke modellen $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met $\pi \in \Pi_S$ gelden dat

$$M \models (\bar{K}\varphi\&\bar{K}\varphi) \leftrightarrow \bar{K}(\varphi\&\varphi).$$

We zullen d.m.v. contrapositie aantonen dat R noodzakelijk scherp is. Onderstel daartoe dat er werelden s' en $t' \in S$ bestaan waarvoor $R(s',t') \in]0,1[$. Aangezien A niet-ledig is, bestaat er minstens één atomische propositie $p \in A$. We beschouwen een interpretatie π' uit Π_S zodat

$$\pi'(t')(p) = 1 \text{ en } \pi'(s)(p) = 0, \forall s \neq t'.$$

Aangezien $p \in A$ geldt $p \in L_A$. Per definitie is $M = \langle S, \pi', R, T\rangle$ een vaag Kripke model. Bij veronderstelling en wegens opmerking 4.2.2(2) i.v.m. de equivalentie van formules moet gelden dat

$$[\bar{K}p\&\bar{K}p]_{M,s} = [\bar{K}(p\&p)]_{M,s}, \forall s \in S \text{ i.h.b. voor } s = s'.$$

Enerzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de sterke conjunctie:

$$\begin{aligned}
&[\bar{K}p\&\bar{K}p]_{M,s'} = T([\bar{K}p]_{M,s'}, [\bar{K}p]_{M,s'}) \\
&\quad \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
&= T(\sup_{t\in S} T(R(s',t),[p]_{M,t}), \sup_{t\in S} T(R(s',t),[p]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \rangle \\
&= T(\max(\sup_{t\in S\setminus\{t'\}} T(R(s',t),0), T(R(s',t'),1)), \max(\sup_{t\in S\setminus\{t'\}} T(R(s',t),0), T(R(s',t'),1))) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \text{ en eigenschap 3.1.1(2) } \rangle \\
&= T(\max(\sup_{t\in S\setminus\{t'\}} 0, R(s',t')), \max(\sup_{t\in S\setminus\{t'\}} 0, R(s',t')))) \\
&\quad \langle \text{ sup(0) = 0 en } R(s',t') \in]0,1[\ \rangle \\
&= T(R(s',t'), R(s',t'))
\end{aligned}$$

Anderzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de duale kennisoperator:

$$\begin{aligned}
&[\bar{K}(p\&p)]_{M,s'} = \sup_{t\in S} T(R(s',t),[p\&p]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie sterke conjunctie } \rangle \\
&= \sup_{t\in S} T(R(s',t), T([p]_{M,t},[p]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \rangle \\
&= \max(\sup_{t\in S\setminus\{t'\}} T(R(s',t),T(0,0)), T(R(s',t'),T(1,1))) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \text{ en eigenschap 3.1.1(2) } \rangle \\
&= \max(\sup_{t\in S\setminus\{t'\}} T(R(s',t),0), T(R(s',t'),1)) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \text{ en eigenschap 3.1.1(2) } \rangle \\
&= \max(\sup_{t\in S\setminus\{t'\}} 0, R(s',t')) \\
&\quad \langle \text{ sup(0) = 0 en } R(s',t') \in]0,1[\ \rangle \\
&= R(s',t')
\end{aligned}$$

Uit eigenschap 3.1.9(19) met $a = b$ bekomen we dat $T(a,a) \leq a$, $\forall a \in [0,1]$. Aangezien T Archimedisch is, zijn 0 en 1 de enige idempotente elementen van T. We hebben verondersteld dat $R(s',t') \in]0,1[$, dus $T(R(s',t'),R(s',t')) \neq R(s',t')$. Combineren we deze twee zaken, dan zien we dat noodzakelijk $T(R(s',t'),R(s',t')) < R(s',t')$. We bekomen m.a.w. dat $[\bar{K}p\&\bar{K}p]_{M,s'} < [\bar{K}(p\&p)]_{M,s'}$. Dit is in strijd met de onderstelling dus moet R noodzakelijk scherp zijn. $\square$

5.2.5 Nog meer axioma's...

Verder onderzoeken we enkele axioma's die we zelf toevoegen en waarnaar we zullen verwijzen met de letters J en K.

Propositie 5.2.17 (Voldoende voorwaarde axioma J)
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met een reflexieve toegankelijkheidsrelatie R geldt:

$$M \models K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \psi), \forall \varphi \in L_A.$$

Bewijs Neem een willekeurige wereld $s \in S$ in een willekeurig vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met een reflexieve toegankelijkheidsrelatie R, m.a.w. $R(s,s) = 1, \forall s \in S$. Verder zijn φ en ψ arbitraire formules uit de vaagmodale taal. We willen aantonen dat $[K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \psi)]_{M,s} = 1$. Gebruik makend van de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) zien we dat dit equivalent is met $[K(\varphi \to \psi)]_{M,s} \le [K\varphi \to \psi]_{M,s}$. We schatten enerzijds af m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$\begin{aligned}
[K(\varphi \to \psi)]_{M,s} &= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi \to \psi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), I_T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie infimum en } s \in S \ \rangle \\
&\le I_T(R(s,s), I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})) \\
&\quad \langle\ R \text{ reflexief } \rangle \\
&= I_T(1, I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.7 } \rangle \\
&= I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}))
\end{aligned}$$

Anderzijds bekomen we m.b.v. de defintie van de implicatie:

$$\begin{aligned}
[K\varphi \to \psi]_{M,s} &= I_T([K\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), [\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ definitie infimum, } s \in S \text{ en } I_T \text{ dalend in eerste argument } \rangle \\
&\ge I_T(I_T(R(s,s), [\varphi]_{M,s}), [\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle\ R \text{ reflexief } \rangle \\
&= I_T(I_T(1, [\varphi]_{M,s}), [\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.7 } \rangle \\
&= I_T([\varphi]_{M,s}, [\psi]_{M,s})
\end{aligned}$$

Als we deze resultaten samenvoegen, zien we dat $[K(\varphi \to \psi)]_{M,s} \le [K\varphi \to \psi]_{M,s}$. Uit het arbitrair zijn van s, M, φ en ψ volgt het gestelde. $\square$

We zullen voortaan naar het axioma $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \psi)$ verwijzen als axioma J.

Opmerking 5.2.9
Voor elke formule $\varphi \in L_A$ is $(\bar{1} \to \varphi) \leftrightarrow \varphi$ een tautologie. Voor een willekeurig vaag Kripke model M en wereld s hebben we immers, wegens opmerking 4.2.2 en de definitie van de implicatie:

$$\begin{aligned}[(\bar{1} \to \varphi) \leftrightarrow \varphi]_{M,s} = 1 \Leftrightarrow [\bar{1} \to \varphi]_{M,s} = [\varphi]_{M,s} \Leftrightarrow I_T([\bar{1}]_{M,s}, [\varphi]_{M,s}) = [\varphi]_{M,s} \\ \Leftrightarrow I_T(1, [\varphi]_{M,s}) = [\varphi]_{M,s} \Leftrightarrow [\varphi]_{M,s} = [\varphi]_{M,s}\end{aligned}$$

waarbij de laatste overgang volgt uit eigenschap 3.1.7. Aangezien s en M willekeurig gekozen waren, volgt dat $(\bar{1} \to \varphi) \leftrightarrow \varphi$ inderdaad een tautologie is. Je kan dit ook beredeneren door op te merken dat de axioma's en afleidingsregels van de basislogica BL gelden in de vage Kripke modellen per definitie van hun modellering en de overeenkomst met de t-algebra's (de bijkomende aanwezigheid van modale operatoren en een toegankelijkheidsrelatie in vage Kripke modellen wijzigt hier niets aan). Bijgevolg zijn ook alle stellingen van BL tautologieën van $\mathcal{M}$, i.h.b. $(\bar{1} \to \varphi) \leftrightarrow \varphi$ wegens eigenschap 5.2.1(13). □

Men kan aantonen dat de reflexiviteit van de toegankelijkheidsrelatie eveneens een nodige voorwaarde is opdat axioma J zou gelden in een vaag Kripke model.

Propositie 5.2.18 (Nodige voorwaarde axioma J [14])
Zij S een niet-ledige verzameling van mogelijke werelden, $R \in \mathcal{R}(S)$ een vage toegankelijkheidsrelatie en T een continue t-norm. Indien geldt dat

$$M \models K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \psi), \forall \varphi, \psi \in L_A, \forall M = \langle S, \pi, R, T\rangle \ \textit{met}\ \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk reflexief.

Bewijs Bij onderstelling moet voor alle formules φ, ψ en alle vage Kripke modellen $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met $\pi \in \Pi_S$ gelden dat

$$M \models K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \psi).$$

I.h.b. moet dit dus gelden voor $\varphi = \bar{1}$ en willekeurige ψ. In dat geval herleidt de uitdrukking zich wegens opmerking 5.2.9 tot axioma B, nl. $M \models K\psi \to \psi$. Immers is

$$[K\bar{1}]_{M,s} = \inf_{t \in S} I_T(R(s,t), [\bar{1}]_{M,s}) = \inf_{t \in S} I_T(R(s,t), 1) = I_T(\sup_{t \in S} R(s,t), 1) = 1 \tag{5.13}$$

wegens de definitie van de kennisoperator en eigenschap 3.1.9(4,1). Uit propositie 5.2.5(1) volgt dat R noodzakelijk reflexief is. □

Axioma J is dus een algemener geval van axioma B, eveneens geldig onder reflexieve toegankelijkheidsrelaties. Merk ook op dat men nog andere axioma's kan afleiden uit de axioma's die reeds werden bewezen. Zo volgt bijvoorbeeld uit de axioma's C en J, die beide gelden onder reflexieve toegankelijkheidsrelaties, dat $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \bar{K}\psi)$. Dit axioma, dat de letter K krijgt, kan ook rechtstreeks aangetoond worden onder een zwakkere voorwaarde, nl. serialiteit van de toegankelijkheidsrelatie.

Propositie 5.2.19 (Voldoende voorwaarde axioma K)
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met een seriële toegankelijkheidsrelatie R geldt:

$$M \models K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \bar{K}\psi), \forall \varphi, \psi \in L_A.$$

Bewijs Neem arbitrair $s \in S$ in een willekeurig vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met een seriële toegankelijkheidsrelatie R, m.a.w. $\sup_{t\in S} R(s,t) = 1, \forall s \in S$. Verder zijn φ en ψ willekeurige formules. M.b.v. de definitie van de implicatie bekomen we:

$$
\begin{aligned}
&[K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \bar{K}\psi)]_{M,s} = I_T([K(\varphi \to \psi)]_{M,s}, [K\varphi \to \bar{K}\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi \to \psi]_{M,t}), [K\varphi \to \bar{K}\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
&= I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), I_T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t})), [K\varphi \to \bar{K}\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
&= I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), I_T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t})), I_T([K\varphi]_{M,s}, [\bar{K}\psi]_{M,s})) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), I_T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t})), I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), [\bar{K}\psi]_{M,s})) \\
&\quad \langle \text{ definitie duale kennisoperator } \rangle \\
&= I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), I_T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t})), I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), \sup_{t\in S} T(R(s,t), [\psi]_{M,t}))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(6) en } I_T \text{ stijgend in tweede argument } \rangle \\
&\geq I_T(\inf_{t\in S} I_T(R(s,t), I_T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t})), \sup_{t\in S} I_T(I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), T(R(s,t), [\psi]_{M,t}))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(6) } \rangle \\
&\geq \sup_{t\in S} I_T(I_T(R(s,t), I_T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t})), I_T(I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), T(R(s,t), [\psi]_{M,t}))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(20) met } a = R(s,t),\ b = [\varphi]_{M,t},\ c = [\psi]_{M,t} \text{ en supremum stijgend } \rangle \\
&\geq \sup_{t\in S} T(R(s,t), T(R(s,t), R(s,t))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(19) met } a = b = R(s,t),\ T \text{ en supremum stijgend } \rangle \\
&\geq \sup_{t\in S} T(T(R(s,t), R(s,t)), T(R(s,t), R(s,t))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(7) } \rangle \\
&= T(\sup_{t\in S} T(R(s,t), R(s,t)), \sup_{t\in S} T(R(s,t), R(s,t))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(7) } \rangle \\
&= T(T(\sup_{t\in S} R(s,t), \sup_{t\in S} R(s,t)), T(\sup_{t\in S} R(s,t), \sup_{t\in S} R(s,t))) \\
&\quad \langle\ R \text{ serieel } \rangle \\
&= T(T(1,1), T(1,1)) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \ \rangle \\
&= T(1,1) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \ \rangle \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Aangezien $[K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \bar{K}\psi)]_{M,s}$ een element is uit het eenheidsinterval, is deze waarheidswaarde noodzakelijk gelijk aan 1. Het gestelde volgt nu uit het arbitrair zijn van s, M, φ en ψ. $\square$

Men kan aantonen dat serialiteit van de toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is opdat axioma K zou gelden in een vaag Kripke model, zelfs in de sterke betekenis (5.2).

Propositie 5.2.20 (Nodige voorwaarde axioma K [14])
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ waarin geldt dat

$$M \models K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \bar{K}\psi), \forall \varphi, \psi \in L_A,$$

is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk serieel.

Bewijs Zij $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ een vaag Kripke model. Bij onderstelling moet voor alle formules φ, ψ gelden dat

$$M \models K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \bar{K}\psi).$$

I.h.b. moet dit dus gelden voor $\varphi = \bar{1}$ en willekeurige ψ. In dat geval herleidt de uitdrukking zich wegens opmerking 5.2.9 en (5.13) tot axioma A, nl. $M \models K\psi \to \bar{K}\psi$. Uit propositie 5.2.3 volgt dat R noodzakelijk serieel is. $\square$

Axioma K is dus een algemener geval van axioma A en beide hebben dezelfde voldoende en nodige voorwaarde, nl. serialiteit van de toegankelijkheidsrelatie. De vorm van axioma J en K doet sterk denken aan het K-axioma uit axiomasysteem 2.2.1, nl. $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$. We onderzoeken de geldigheid van dit axioma, waar we hier naar verwijzen als axioma L.

Propositie 5.2.21 (Voldoende voorwaarde axioma L)
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ met een scherpe toegankelijkheidsrelatie R geldt:

$$M \models K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi), \forall \varphi, \psi \in L_A.$$

Bewijs Neem een willekeurige wereld $s \in S$ in een willekeurig vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T \rangle$ met een scherpe toegankelijkheidsrelatie R, m.a.w. $R(s,t) \in \{0,1\}, \forall s,t \in S$. Verder zijn φ en ψ willekeurige formules uit de vaagmodale taal. We willen aantonen dat $[K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $[K(\varphi \to \psi)]_{M,s} \leq [K\varphi \to K\psi]_{M,s}$. Vooreerst voeren we volgende notatie in:

$$S_s = \{t \in S | R(s,t) = 1\}. \tag{5.14}$$

Merk op dat voor een scherpe toegankelijkheidsrelatie R geldt dat $R(s,t) = 0$ als $t \notin S_s$. De verzameling S_s kan evenuteel ledig zijn voor de wereld s. We gebruiken de conventie dat het infimum van de lege verzameling gelijk is aan 1 (als het grootste element van de tralie waarin we werken). Voor een willekeurige formule kunnen we $[K\chi]_{M,s}$ vereenvoudigen op volgende wijze m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$\begin{aligned}
[K\chi]_{M,s} &= \inf_{t \in S} I_T(R(s,t), [\chi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ opsplitsing infimum } \rangle \\
&= \min(\inf_{t \in S_s} I_T(R(s,t), [\chi]_{M,t}), \inf_{t \notin S_s} I_T(R(s,t), [\chi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie } S_s \text{ en } R \text{ scherp } \rangle \\
&= \min(\inf_{t \in S_s} I_T(1, [\chi]_{M,t}), \inf_{t \notin S_s} I_T(0, [\chi]_{M,t}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \text{ eigenschap 3.1.6(1) } \rangle \\
&= \min(\inf_{t \in S_s} I_T(1, [\chi]_{M,t}), \inf_{t \notin S_s} 1) \\
&\langle \text{ inf}(1) = 1 \text{ en eigenschap 3.1.7 } \rangle \\
&= \min(\inf_{t \in S_s} [\chi]_{M,t}, 1) \\
&\langle \text{ inf}_{t \in S_s} [\chi]_{M,t} \leq 1 \ \rangle \\
&= \inf_{t \in S_s} [\chi]_{M,t}
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Uit deze uitwerking volgt eveneens dat

$$[K\chi]_{M,s} = 1 \text{ als } S_s = \phi.$$

We werken uit m.b.v. (5.15):

$$
\begin{aligned}
[K(\varphi \rightarrow \psi)]_{M,s} &= \inf_{t \in S_s} [\varphi \rightarrow \psi]_{M,t} \\
&\langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
&= \inf_{t \in S_s} I_T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t})
\end{aligned}
$$

Anderzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de implicatie:

$$
\begin{aligned}
[K\varphi \rightarrow K\psi]_{M,s} &= I_T([K\varphi]_{M,s}, [K\psi]_{M,s}) \\
&\langle \text{ (5.15) } \rangle \\
&= I_T(\inf_{u \in S_s} [\varphi]_{M,u}, \inf_{t \in S_s} [\psi]_{M,t}) \\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= \inf_{t \in S_s} I_T(\inf_{u \in S_s} [\varphi]_{M,u}, [\psi]_{M,t}) \\
&\langle \text{ definitie infimum, } t \in S_s, \text{ infimum stijgend } \rangle \\
&\langle\ I_T \text{ dalend in eerste argument } \rangle \\
&\geq \inf_{t \in S_s} I_T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t})
\end{aligned}
$$

We bekomen het gewenste resultaat, nl. $[K(\varphi \rightarrow \psi)]_{M,s} \leq [K\varphi \rightarrow K\psi]_{M,s}$. Het gestelde volgt nu uit het willekeurig zijn van s, M, φ en ψ. $\square$

We kunnen niet bewijzen dat een scherpe toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is opdat axioma L zou gelden, toch niet in de zin van 5.3):

$$\forall S \neq \phi, \forall T \in \mathcal{T}_c : (\forall \pi \in \Pi_S : \langle S, \pi, R, T \rangle \models \alpha) \Rightarrow R \text{ heeft eigenschap } P$$

om de simpele reden dat dit niet geldt. De reden is gelijkaardig als bij axioma 6, nl. indien men als continue t-norm het minimum gebruikt, is axioma L voor willekeurige toegankelijkheidsrelatie R voldaan. We bewijzen dit in het tweede puntje van onderstaand lemma, waarbij we steunen op een hulpresultaat uit het eerste puntje.

Lemma 5.2.22

1. $(I_M(a, I_M(b, c)) \leq I_M(I_M(a, b), I_M(a, c)), \forall a, b, c \in [0, 1]$.
2. $\forall S \neq \phi, \forall \pi \in \Pi_S, \forall R \in \mathcal{R}(S) : M = \langle S, \pi, R, T_M \rangle \models$ *axioma L*.

Bewijs

1. Stel dat a, b en c willekeurige elementen zijn uit het eenheidsinterval. Uit tabel 3.1 weten we dat $I_M(a,b) = 1$ als $a \leq b$ en $I_M(a,b) = b$ als $a > b$. We bewijzen het gestelde met een gevallenonderzoek.

   $\boxed{b \leq c}$

   Uit het stijgend zijn van I_M in het tweede argument volgt $I_M(a,b) \leq I_M(a,c)$. Het rechterlid $I_M(I_M(a,b), I_M(a,c))$ herleidt zich wegens de definitie van I_M tot 1. Het linkerlid $(I_M(a, I_M(b,c))$ herleidt zich wegens de definitie van I_M tot $I_M(a,1) = 1$. We bekomen dus de gelijkheid tussen beide leden.

   $\boxed{b > c}$

   Het linkerlid $(I_M(a, I_M(b,c))$ herleidt zich wegens de definitie van I_M tot $I_M(a,c)$. Uit het stijgend zijn van I_M in het tweede argument volgt $I_M(a,b) \geq I_M(a,c)$. Indien $I_M(a,b) = I_M(a,c)$ wordt het rechterlid $I_M(I_M(a,b), I_M(a,c)) = 1$ wegens de definitie van I_M. Aangezien het linkerlid tot het eenheidsinterval behoort, bekomen we dan het gewenste resultaat. Indien $I_M(a,b) > I_M(a,c)$ herleidt het rechterlid zich tot het linkerlid wegens de definitie van I_M.

   In alle gevallen is de uitdrukking correct.

2. Zij $M = \langle S, \pi, R, T_M \rangle$ een willekeurig vaag Kripke model. Zoals in het bewijs van propositie 5.2.21, hebben we enerzijds voor willekeurige wereld s en willekeurige formules φ en ψ m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$
\begin{aligned}
&[K(\varphi \to \psi)]_{M,s} = \inf_{t \in S} I_M(R(s,t), [\varphi \to \psi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\
&= \inf_{t \in S} I_M(R(s,t), I_M([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t}))
\end{aligned}
$$

   Anderzijds geldt m.b.v. de definitie van de implicatie:

$$
\begin{aligned}
&[K\varphi \to K\psi]_{M,s} = I_M([K\varphi]_{M,s}, [K\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= I_M(\inf_{u \in S} I_M(R(s,u), [\varphi]_{M,u}), \inf_{t \in S} I_M(R(s,t), [\psi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= \inf_{t \in S} I_M(\inf_{u \in S} I_M(R(s,u), [\varphi]_{M,u}), I_M(R(s,t), [\psi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie infimum, } t \in S\text{, infimum stijgend en } I_T \text{ dalend in eerste argument } \rangle \\
&\geq \inf_{t \in S} I_M(I_M(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), I_M(R(s,t), [\psi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ vorige puntje met } a = R(s,t),\ b = [\varphi]_{M,t},\ c = [\psi]_{M,t} \text{ en infimum stijgend } \rangle \\
&\geq \inf_{t \in S} I_M(R(s,t), I_M([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t}))
\end{aligned}
$$

   We bekomen m.a.w. dat $[K\varphi \to K\psi]_{M,s} \geq [K(\varphi \to \psi)]_{M,s}$. Uit eigenschap 3.1.9(1) en de definitie van de implicatie zien we dat $[K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)]_{M,s}$. Het gestelde volgt nu uit het willekeurig zijn van s, M, φ en ψ. $\square$

Wegens lemma 5.2.22(2) zien we dat axioma L geldig is in elk vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T_M \rangle$ zonder dat we enige voorwaarde op R gelegd hebben. Om die reden is er voor axioma L geen enkele nodige voorwaarde op de toegankelijkheidsrelatie R die voor elke continue t-norm geldt. We kunnen wel een zwakkere variant van nodige voorwaarde aantonen, nl. (5.12):

$$\forall S \neq \phi : (\forall T \in \mathcal{T}_c, \forall \pi \in \Pi_S : \langle S, \pi, R, T \rangle \models \alpha) \Rightarrow R \text{ heeft eigenschap } P.$$

Meer specifiek zullen we dit bewijzen door aan te tonen dat voor elke Archimedische t-norm (zie definitie 3.1.7) geldt:

$$\begin{gathered} \forall S \neq \phi, \forall T \in \mathcal{T}_c \text{ met } T \text{ Archimedisch :} \\ (\forall \pi \in \Pi_S : \langle S, \pi, R, T \rangle \models \ \textit{axioma } L) \Rightarrow R \textit{ is scherp}. \end{gathered}$$

Propositie 5.2.23 (Nodige voorwaarde axioma L)
Onderstel dat A minstens twee atomische proposities bevat. Zij S een niet-ledige verzameling van mogelijke werelden, $R \in \mathcal{R}(S)$ een vage toegankelijkheidsrelatie en T een Archimedische t-norm. Indien geldt dat

$$M \models K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi), \forall \varphi, \psi \in L_A, \forall M = \langle S, \pi, R, T \rangle \ \textit{ met } \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk scherp.

Bewijs Onderstel dat $S \neq \phi$. We zullen d.m.v. contrapositie aantonen dat R noodzakelijk scherp is. Onderstel daartoe dat er werelden s' en $t' \in S$ bestaan waarvoor $R(s', t') \in]0, 1[$. We weten dat A minstens twee elementen bevat, stel p en q. Beschouw de volgende interpretatie $\pi' \in \Pi_S$:

$$\pi'(t)(p) = R(s', t), \forall t \in S \text{ en } \pi'(t)(q) = 1, \forall t \neq t', \pi'(t')(q) = T(R(s', t'), R(s', t')).$$

Aangezien p en q atomische proposities zijn, behoren ze tot de vaagmodale taal L_A. Per definitie is $M = \langle S, \pi', R, T \rangle$ een vaag Kripke model. Bij onderstelling moet gelden dat

$$[K(p \to q) \to (Kp \to Kq)]_{M,s}, \forall s \in S \text{ dus i.h.b. voor } s = s'.$$

We berekenen de waarheidswaarde $[K(p \to q)]_{M,s'}$ m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$\begin{aligned} [K(p \to q)]_{M,s'} &= \inf_{t \in S} I_T(R(s', t), [p \to q]_{M,t}) \\ &\quad \langle \text{ definitie implicatie } \rangle \\ &= \inf_{t \in S} I_T(R(s', t), I_T([p]_{M,t}, [q]_{M,t})) \\ &\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\ &= \inf_{t \in S} I_T(T(R(s', t), [p]_{M,t}), [q]_{M,t}) \\ &\quad \langle \text{ definitie } \pi' \text{ m.b.t. } p \ \rangle \\ &= \inf_{t \in S} I_T(T(R(s', t), R(s', t)), [q]_{M,t}) \\ &\quad \langle \text{ definitie } \pi' \text{ m.b.t. } q \ \rangle \\ &= \min(\inf_{t \in S \setminus \{t'\}} I_T(T(R(s', t), R(s', t)), 1), I_T(T(R(s', t'), R(s', t')), T(R(s', t'), R(s', t')))) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \text{ eigenschap 3.1.6(2) } \rangle\\
&= \min(\inf_{t\in S\setminus\{t'\}} 1, I_T(T(R(s',t'),R(s',t')),T(R(s',t'),R(s',t'))))\\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.9(1) } \rangle\\
&= \min(\inf_{t\in S\setminus\{t'\}} 1, 1)\\
&\langle \text{ inf(1) = 1 en min(1,1) = 1 } \rangle\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Anderzijds berekenen we $[Kp \to Kq]_{M,s'}$ m.b.v. de definitie van de implicatie:

$$
\begin{aligned}
&[Kp \to Kq]_{M,s'} = I_T([Kp]_{M,s'},[Kq]_{M,s'})\\
&\langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle\\
&= I_T(\inf_{u\in S} I_T(R(s',u),[p]_{M,u}), \inf_{t\in S} I_T(R(s',t),[q]_{M,t}))\\
&\langle \text{ definitie } \pi' \text{ m.b.t. } p \rangle\\
&= I_T(\inf_{u\in S} I_T(R(s',u),R(s',u)), \inf_{t\in S} I_T(R(s',t),[q]_{M,t}))\\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.9(1) } \rangle\\
&= I_T(\inf_{u\in S} 1, \inf_{t\in S} I_T(R(s',t),[q]_{M,t}))\\
&\langle \text{ inf(1) = 1 } \rangle\\
&= I_T(1, \inf_{t\in S} I_T(R(s',t),[q]_{M,t}))\\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.7 } \rangle\\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s',t),[q]_{M,t})\\
&\langle \text{ definitie } \pi' \text{ m.b.t. } q \rangle\\
&= \min(\inf_{t\in S\setminus\{t'\}} I_T(R(s',t),1), I_T(R(s',t'),T(R(s',t'),R(s',t'))))\\
&\langle \text{ eigenschap 3.1.6(2) } \rangle\\
&= \min(\inf_{t\in S\setminus\{t'\}} 1, I_T(R(s',t'),T(R(s',t'),R(s',t'))))\\
&\langle \text{ inf(1) = 1 en } I_T(R(s',t'),T(R(s',t'),R(s',t'))) \leq 1 \rangle\\
&= I_T(R(s',t'),T(R(s',t'),R(s',t')))
\end{aligned}
$$

We hebben ondersteld dat T Archimedich is en dat $R(s',t') \in]0,1[$. Bijgevolg is $R(s',t')$ niet idempotent m.a.w. $T(R(s',t'),R(s',t')) \neq R(s',t')$. Combineren we dit met eigenschap 3.1.9(19) toegepast met $a = b = R(s',t')$ dan bekomen we $T(R(s',t'),R(s',t')) < R(s',t')$. Wegens eigenschap 3.1.9(1) en bovenstaande uitwerking bekomen we $[Kp \to Kq]_{M,s'} < 1$. Bijgevolg geldt er $[K(p \to q)]_{M,s'} > [Kp \to Kq]_{M,s'}$. Opnieuw wegens eigenschap 3.1.9(1) en de definitie van de implicatie bekomen we dat $[K(p \to q) \to (Kp \to Kq)]_{M,s'} \neq 1$. Dit is in strijd met de onderstelling, dus moet R noodzakelijk scherp zijn. $\square$

We onderzoeken nog een paar axioma's uit [4], waarnaar we verwijzen met de letters M en N.

Propositie 5.2.24 (Voldoende voorwaarde axioma M)
Voor elk vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ geldt:

$$\forall a \in [0,1], \forall \varphi \in L_A : K(\bar{a} \to \varphi) \leftrightarrow (\bar{a} \to K\varphi)$$

Bewijs Onderstel dat s een willekeurige wereld is uit een willekeurig vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$. Neem een arbitraire waarde a uit het eenheidsinterval. De waarheidswaarde van $[K(\bar{a} \to \varphi) \leftrightarrow (\bar{a} \to K\varphi)]_{M,s}$ moet 1 zijn. Wegens opmerking 4.2.2(2) i.v.m. equivalente formules, zal dit voldaan zijn als en slechts als

$$[K(\bar{a} \to \varphi)]_{M,s} = [\bar{a} \to K\varphi]_{M,s}$$

Het rechterlid kan wegens de definitie van de modellering van een constante en van de implicatie als volgt uitgewerkt worden:

$$\begin{aligned}
[\bar{a} \to K\varphi]_{M,s} &= I_T(a, [K\varphi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= I_T(a, \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(3) } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(a, I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(T(a, R(s,t)), [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle\ T \text{ commutatief } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(T(R(s,t), a), [\varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(8) } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), I_T(a, [\varphi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie modellering constante en implicatie } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\bar{a} \to \varphi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= [K(\bar{a} \to \varphi)]_{M,s}
\end{aligned}$$

We zien we dat dit precies het linkerlid is. Uit het arbitrair zijn van a, φ, s en M volgt het gestelde. $\square$

We zullen voortaan naar dit axioma verwijzen als axioma M.

Propositie 5.2.25 (Voldoende voorwaarde axioma N)
In een vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ met scherpe toegankelijkheidsrelatie R geldt:

$$M \models (K\varphi \& K\psi) \to K(\varphi \& \psi), \forall \varphi, \psi \in L_A.$$

Bewijs Zij $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ een willekeurig vaag Kripke model met scherpe toegankelijkheidsrelatie R, s een willekeurig wereld uit S en φ en ψ formules uit L_A. We willen aantonen dat $[(K\varphi \& K\psi) \to K(\varphi \& \psi)]_{M,s} = 1$. Wegens de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is het gestelde equivalent met $[K\varphi \& K\psi]_{M,s} \leq [K(\varphi \& \psi)]_{M,s}$. We kunnen gebruik maken van (5.15) uit het bewijs van propositie 5.2.21:

$$[K\chi]_{M,s} = \inf_{t\in S_s} [\chi]_{M,t}, \forall \chi \in L_A,\ \text{met } S_s = \{t \in S | R(s,t) = 1\}.$$

Enerzijds maken we gebruik van (5.15):

$$[K(\varphi \& \psi)]_{M,s} = \inf_{t\in S_s} [\varphi \& \psi]_{M,t}$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \text{ definitie sterke conjunctie } \rangle \\
&= \inf_{t \in S_s} T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t})
\end{aligned}
$$

Anderzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de sterke conjunctie:

$$
\begin{aligned}
[K\varphi \& K\psi]_{M,s} &= T([K\varphi]_{M,s}, [K\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ (5.15) } \rangle \\
&= T(\inf_{t \in S_s} [\varphi]_{M,t}, \inf_{u \in S_s} [\psi]_{M,u}) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.2(2) en } T \text{ commutatief } \rangle \\
&= \inf_{u \in S_s} \inf_{t \in S_s} T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,u}) \\
&\quad \langle \text{ definitie infimum en } t \in S_s \ \rangle \\
&\leq \inf_{t \in S_s} T([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t})
\end{aligned}
$$

We bekomen het gewenste resultaat. Het gestelde volgt nu uit het arbitrair zijn van φ, ψ, s en M. □

We kunnen niet bewijzen dat een scherpe toegankelijkheidsrelatie een nodige voorwaarde is opdat axioma N zou gelden, toch niet in de zin van 5.3):

$$\forall S \neq \phi, \forall T \in \mathcal{T}_c : (\forall \pi \in \Pi_S : \langle S, \pi, R, T \rangle \models \alpha) \Rightarrow R \text{ heeft eigenschap } P$$

om de simpele reden dat dit niet geldt. De reden is gelijkaardig als bij axioma 6, nl. indien men als continue t-norm het minimum gebruikt, is axioma N voor willekeurige toegankelijkheidsrelatie R voldaan. We bewijzen dit in onderstaand lemma.

Lemma 5.2.26

1. $\min(I_M(a,b), I_M(a,c)) = I_M(a, \min(b,c)), \forall a,b,c \in [0,1]$.

2. $\forall S \neq \phi, \forall \pi \in \Pi_S, \forall R \in \mathcal{R}(S) : M = \langle S, \pi, R, T_M \rangle \models$ *axioma* N.

Bewijs

1. Stel dat a, b en c willekeurige elementen zijn uit het eenheidsinterval. Aangezien het gestelde symmetrisch is in b en c als gevolg van de commutativiteit van het minimum, mogen we zonder verlies van algemeenheid onderstellen dat $b \leq c$. Bijgevolg is $\min(b,c) = b$. Het rechterlid van het gestelde herleidt zich tot $I_M(a,b)$. Aangezien I_M als implicator stijgend is in het tweede argument, geldt $I_M(a,b) \leq I_M(a,c)$. Bijgevolg is het linkerlid van het gestelde gelijk aan $I_M(a,b)$. Hiermee is het gestelde bewezen.

2. Zij $M = \langle S, \pi, R, T_M \rangle$ een willekeurig vaag Kripke model. Zoals in het bewijs van propositie 5.2.25, hebben we enerzijds voor willekeurige wereld s en willekeurige formules φ en ψ en m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$
\begin{aligned}
[K(\varphi \& \psi)]_{M,s} &= \inf_{t \in S} I_M(R(s,t), [\varphi \& \psi]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie sterke conjunctie m.b.v. } T_M = \min \ \rangle \\
&= \inf_{t \in S} I_M(R(s,t), \min([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t}))
\end{aligned}
$$

Anderzijds geldt m.b.v. de defintie van de sterke conjunctie:

$$\begin{aligned}
[K\varphi\&K\psi]_{M,s} &= \min([K\varphi]_{M,s}, [K\psi]_{M,s}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= \min(\inf_{t\in S} I_M(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), \inf_{u\in S} I_M(R(s,u), [\psi]_{M,u})) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.2(2) en minimum commutatief } \rangle \\
&= \inf_{u\in S}\inf_{t\in S} \min(I_M(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), I_M(R(s,u), [\psi]_{M,u})) \\
&\quad \langle \text{ definitie infimum en } t \in S \ \rangle \\
&\leq \inf_{t\in S} \min(I_M(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), I_M(R(s,t), [\psi]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ vorig puntje met } a = R(s,t),\ b = [\varphi]_{M,t} \text{ en } c = [\psi]_{M,t} \ \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_M(R(s,t), \min([\varphi]_{M,t}, [\psi]_{M,t}))
\end{aligned}$$

We bekomen m.a.w. dat $[K\varphi\&K\psi]_{M,s} \leq [K(\varphi\&\psi)]_{M,s}$. M.b.v. eigenschap 3.1.9(1) en de definitie van de implicatie zien we dat $[(K\varphi\&K\psi) \to K(\varphi\&\psi)]_{M,s} = 1$ geldt. Het gestelde volgt nu uit het willekeurig zijn van s, M, φ en ψ. □

Wegens lemma 5.2.26(2) zien we dat axioma N geldig is in elk vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T_M\rangle$ zonder dat we enige voorwaarde op R gelegd hebben. Om die reden is er voor axioma N geen enkele nodige voorwaarde op de toegankelijkheidsrelatie R die voor elke continue t-norm geldt. We kunnen wel een zwakkere variant van nodige voorwaarde aantonen, nl. (5.12):

$$\forall S : (\forall T, \forall \pi : \langle S, \pi, R, T\rangle \models \alpha) \Rightarrow R \text{ heeft eigenschap } P.$$

Meer specifiek zullen dit bewijzen door aan te tonen dat voor elke Archimedische t-norm (zie definitie 3.1.7) geldt:

$$\begin{gathered}\forall S, T \text{ met } T \text{ Archimedisch :} \\ (\forall \pi : \langle S, \pi, R, T\rangle \models \ \textit{axioma } N) \Rightarrow R \textit{ is scherp}.\end{gathered}$$

Propositie 5.2.27 (Nodige voorwaarde axioma N)
Zij S een niet-ledige verzameling van mogelijke werelden, $R \in \mathcal{R}(S)$ een vage toegankelijkheidsrelatie en T een Archimedische t-norm. Indien geldt dat

$$M \models (K\varphi\&K\psi) \to K(\varphi\&\psi), \forall \varphi, \psi \in L_A, \forall M = \langle S, \pi, R, T\rangle \ \textit{ met } \pi \in \Pi_S,$$

dan is de toegankelijkheidsrelatie R noodzakelijk scherp.

Bewijs Onderstel dat $S \neq \phi$. We zullen d.m.v. contrapositie aantonen dat R noodzakelijk scherp is. Onderstel daartoe dat er werelden s' en $t' \in S$ bestaan waarvoor $R(s', t') \in]0, 1[$. Aangezien A niet-ledig is, bestaat er minstens één atomische propositie $p \in A$. Beschouw de volgende interpretatie $\pi' \in \Pi_S$:

$$\pi'(t')(p) = R(s', t') \text{ en } \pi'(s)(p) = 1, \forall s \neq t'.$$

Aangezien $p \in A$ geldt $p \in L_A$. Per definitie is $M = \langle S, \pi', R, T\rangle$ een vaag Kripke model. Bij onderstelling moet gelden voor de $\varphi = \psi = p$ dat

$$[(Kp\&Kp) \to K(p\&p)]_{M,s} = 1, \forall s \in S \text{ i.h.b. voor } s = s'.$$

Dit is equivalent met $[Kp\&Kp]_{M,s'} \leq [K(p\&p)]_{M,s'}$ wegens de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) . Het linkerlid herleidt zich wegens de definitie van de sterke conjunctie tot:

$$\begin{aligned}
[Kp\&Kp]_{M,s'} &= T([Kp]_{M,s'}, [Kp]_{M,s'}) \\
&\quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle \\
&= T(\inf_{t\in S} I_T(R(s',t),[p]_{M,t}), \inf_{t\in S} I_T(R(s',t),[p]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \ \rangle \\
&= T(\min(\inf_{t\in S\setminus\{t'\}} I_T(R(s',t),1), I_T(R(s',t'),R(s',t')), \\
&\qquad \min(\inf_{t\in S\setminus\{t'\}} I_T(R(s',t),1), I_T(R(s',t'),R(s',t'))) \\
&\quad \langle \text{ eigenschap 3.1.6(2) en eigenschap 3.1.9(1) } \rangle \\
&= T(\min(\inf_{t\in S\setminus\{t'\}} 1,1), \min(\inf_{t\in S\setminus\{t'\}} 1,1)) \\
&\quad \langle \text{ inf}(1) = 1 \text{ en } \min(1,1) = 1 \ \rangle \\
&= T(1,1) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \ \rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

Anderzijds bekomen we m.b.v. de definitie van de kennisoperator:

$$\begin{aligned}
[K(p\&p)]_{M,s'} &= \inf_{t\in S} I_T(R(s',t),[p\&p]_{M,t}) \\
&\quad \langle \text{ definitie sterke conjunctie } \rangle \\
&= \inf_{t\in S} I_T(R(s',t), T([p]_{M,t},[p]_{M,t})) \\
&\quad \langle \text{ definitie } \pi' \ \rangle \\
&= \min(\inf_{t\in S\setminus\{t'\}} I_T(R(s',t),T(1,1)), I_T(R(s',t'),T(R(s',t'),R(s',t')))) \\
&\quad \langle \text{ randvoorwaarde } T \text{ en eigenschap 3.1.6(2) } \rangle \\
&= \min(\inf_{t\in S\setminus\{t'\}} 1, I_T(R(s',t'),T(R(s',t'),R(s',t')))) \\
&\quad \langle \text{ inf}(1) = 1 \text{ en } I_T(R(s',t'),T(R(s',t'),R(s',t'))) \leq 1 \ \rangle \\
&= I_T(R(s',t'),T(R(s',t'),R(s',t')))
\end{aligned}$$

Bij veronderstelling is T Archimedisch en $R(s',t') \in]0,1[$. Hieruit volgt dat

$$T(R(s',t'),R(s',t')) \neq R(s',t').$$

Uit eigenschap 3.1.9(19) met $a = b = R(s',t')$ volgt dat

$$T(R(s',t'),R(s',t')) \leq R(s',t').$$

Bijgevolg geldt $T(R(s',t'),R(s',t')) < R(s',t')$. M.b.v. eigenschap 3.1.9(1) bekomen we $[K(p\&p)]_{M,s'} < 1$. Aangezien we al berekend hadden dat $[Kp\&Kp]_{M,s'} = 1$, zien we dat $[Kp\&Kp]_{M,s'} > [K(p\&p)]_{M,s'}$. Dit is in strijd met de onderstelling dus moet R noodzakelijk scherp zijn. $\square$

We kunnen eenvoudig nagaan dat de semantische variant van de afleidingsregel met de modale operator (gekend als de noodzakelijkheidsregel oftewel het zevende item uit axiomasysteem 5.2.2) geldig is zonder enige restricties op de toegankelijkheidsrelatie.

Propositie 5.2.28 (Noodzakelijkheidsregel)
Voor de klasse $\mathcal{M}$ van vage Kripke modellen $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ geldt de noodzakelijkheidsregel

$$\models \varphi \Rightarrow \models K\varphi, \forall \varphi \in L_A.$$

Bewijs Laten we veronderstellen dat $M \models \varphi$ geldt voor een willekeurig vaag Kripke model $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$, i.e.

$$\begin{aligned}
&\forall t \in S : [\varphi]_{M,t} = 1\\
&\Rightarrow \quad \langle \text{ definitie kennisoperator } \rangle\\
&\forall s \in S : [K\varphi]_{M,s} = \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) = \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), 1)\\
&\Rightarrow \quad \langle \text{ eigenschap 3.1.6(2) } \rangle\\
&\forall s \in S : [K\varphi]_{M,s} = \inf_{t\in S} 1 = 1\\
&\Leftrightarrow \quad \langle \text{ definitie modellering } \rangle\\
&M \models K\varphi
\end{aligned}$$

Uit de willekeur van M volgt dat $M \models \varphi \Rightarrow M \models K\varphi$ geldt voor elke $M \in \mathcal{M}$. Hieruit volgt dat $\models \varphi \Rightarrow \models K\varphi$ geldt. $\square$

Er bestaat ook een vage variant van de noodzakelijkheidsregel: $\forall a \in [0,1]$: $[\varphi]_{M,s} \geq a$, $\forall s \in S$, $\forall M \in \mathcal{M} \Rightarrow [K\varphi]_{M,s} \geq a$, $\forall s \in S$, $\forall M \in \mathcal{M}$. Deze kan ook geschreven worden als $\models (\bar{a} \to \varphi) \Rightarrow \models (\bar{a} \to K\varphi)$ aangezien $I_T(a, [\varphi]_{M,s}) = 1 \Leftrightarrow a \geq [\varphi]_{M,s}$ (zie eigenschap 3.1.9(1)). Voor $a = 1$ bekomen we de regel uit propositie 5.2.28.

Propositie 5.2.29 (Vage noodzakelijkheidsregel)
Voor de klasse $\mathcal{M}$ van vage Kripke modellen $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ geldt de vage noodzakelijkheidsregel

$$\forall \varphi \in L_A, \forall a \in [0,1] : \models \bar{a} \to \varphi \Rightarrow \models \bar{a} \to K\varphi.$$

Bewijs Neem een willekeurige $a \in [0,1]$ en een willekeurige formule φ. We tonen aan dat $\models \bar{a} \to \varphi \Rightarrow \models \bar{a} \to K\varphi$ geldt door het sterkere $\forall M \in \mathcal{M}$: $M \models \bar{a} \to \varphi \Rightarrow M \models \bar{a} \to K\varphi$ te bewijzen. Zij $M = \langle S, \pi, R, T\rangle \in \mathcal{M}$ een willekeurig vaag Kripke model. Laten we veronderstellen dat $M \models \bar{a} \to \varphi$, i.e. dat $[\bar{a} \to \varphi]_{M,t} = 1$ voor elke $t \in S$. Wegens de definitie van de implicatie, de interpretatie van een constante en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $a \leq [\varphi]_{M,t}, \forall t \in S$. We willen aantonen dat $M \models \bar{a} \to K\varphi$, i.e. dat $[\bar{a} \to K\varphi]_{M,s}$ voor elke $s \in S$. Wegens de definitie van de implicatie, de interpretatie van een constante en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met $a \leq [K\varphi]_{M,s}, \forall s \in S$. Gebruik makend van de definitie van de kennisoperator bekomen we:

$$\begin{aligned}
&\forall s \in S : [K\varphi]_{M,s} = \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t})\\
&\Rightarrow \quad \langle \text{ infimum stijgend, } I_T \text{ stijgend in tweede argument en } a \leq [\varphi]_{M,t}, \forall t \in S \ \rangle\\
&\forall s \in S : [K\varphi]_{M,s} \geq \inf_{t\in S} I_T(R(s,t), a)\\
&\Leftrightarrow \quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(4), } a \text{ onafhankelijk van } t \ \rangle\\
&\forall s \in S : [K\varphi]_{M,s} \geq I_T(\sup_{t\in S} R(s,t), a)\\
&\Rightarrow \quad \langle \text{ eigenschap 3.1.9(19) met } a = \sup\nolimits_{t\in S} R(s,t) \text{ en } b = a \ \rangle
\end{aligned}$$

$\forall s \in S : [K\varphi]_{M,s} \geq a$

Het gestelde volgt nu uit het arbitrair zijn van M, a en φ. $\square$

De volgende afleidingsregel staat bekend onder de naam *monotoniciteitsregel*:

$$\frac{\varphi \to \psi}{K\varphi \to K\psi}.$$

Men kan nagaan dat de semantische variant van deze afleidingsregel geldig is in de klasse vage Kripke modellen met willekeurige toegankelijkheidsrelatie R.

Propositie 5.2.30 (Monotoniciteitsregel)
Voor de klasse $\mathcal{M}$ van vage Kripke modellen $M = \langle S, \pi, R, T\rangle$ geldt de monotoniciteitsregel

$$\forall \varphi, \psi \in L_A : \models \varphi \to \psi \Rightarrow \models K\varphi \to K\psi.$$

Bewijs Neem willekeurige formules φ en ψ. Opnieuw tonen we het gestelde $\models \varphi \to \psi \Rightarrow \models K\varphi \to K\psi$ aan door het sterkere $\forall M \in \mathcal{M}$: $M \models \varphi \to \psi \Rightarrow M \models K\varphi \to K\psi$ te bewijzen. Zij $M = \langle S, \pi, R, T\rangle \in \mathcal{M}$ een willekeurig vaag Kripke model. De onderstelling houdt in dat $[\varphi \to \psi]_{M,t} = 1$, $\forall t \in M$. Wegens de definitie van de implicatie en eigenschap 3.1.9(1) is dit equivalent met

$$\begin{aligned}
&\forall t \in S : [\varphi]_{M,t} \leq [\psi]_{M,t} \\
&\Rightarrow \quad \langle\ I_T \text{ stijgend in het tweede argument}\ \rangle \\
&\forall s \in S, \forall t \in S : I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) \leq I_T(R(s,t), [\psi]_{M,t}) \\
&\Rightarrow \quad \langle\ \text{infimum stijgend}\ \rangle \\
&\forall s \in S : \inf_{t \in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}) \leq \inf_{t \in S} I_T(R(s,t), [\psi]_{M,t}) \\
&\Leftrightarrow \quad \langle\ \text{eigenschap 3.1.9(1)}\ \rangle \\
&\forall s \in S : I_T(\inf_{t \in S} I_T(R(s,t), [\varphi]_{M,t}), \inf_{t \in S} I_T(R(s,t), [\psi]_{M,t})) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \langle\ \text{definitie kennisoperator}\ \rangle \\
&\forall s \in S : I_T([K\varphi]_{M,s}, [K\psi]_{M,s}) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \langle\ \text{definitie implicatie}\ \rangle \\
&\forall s \in S : [K\varphi \to K\psi]_{M,s} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \langle\ \text{definitie modellering}\ \rangle \\
&M \models K\varphi \to K\psi
\end{aligned}$$

Gecombineerd met de willekeur van φ, ψ en M is het gestelde bewezen. $\square$

Opmerking 5.2.10
Men kan eenvoudig inzien dat het K-axioma (hier ingevoerd als axioma L) $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$ samen met de noodzakelijkheidsregel leidt tot de monotoniciteitsregel. $\square$

5.2.6 Overzicht axioma's en afleidingsregels

De resultaten i.v.m. geldigheid van axioma's en afleidingsregels worden samengevat in tabel 5.2. We herinneren er nog eens aan dat de vage Kripke modellen gemodelleerd zijn m.b.v. een continue t-norm en bijhorende residuele implicator. Axioma 3 t.e.m. 6 komen uit [10], axioma A t.e.m. I uit [14], axioma J en K voegden we zelf toe, axioma L is afkomstig uit het scherpe geval en axioma M en N haalden we uit [4]. De meeste bewijzen hebben we zelf geconstrueerd, met uitzondering van proposities 5.2.2, 5.2.5(1), 5.2.7(1) 5.2.8(1), 5.2.9(1) en 5.2.11(1), waarbij de bewijzen gebaseerd zijn op [14]. Ook in proposities 5.2.5(2), 5.2.7(2), 5.2.9(2), 5.2.11(2) haalden we de kernidee uit [14]. Een willekeurig element uit het eenheidsinterval wordt a genoteerd. Belangrijk is dat er naar de precieze formulering van de proposities moet gekeken worden voor de interpretatie van het begrip *nodige voorwaarde*! Dit verschilt namelijk van axioma tot axioma.

axioma	nodige voorwaarde	voldoende voorwaarde
$3(a).\, K(K\psi \to \varphi) \to (K\psi \to K\varphi)$	$R \equiv a$?	$R \equiv a$ (pr. 5.2.12(1))
$3(b).\, K(\bar{K}\psi \to \varphi) \to (\bar{K}\psi \to K\varphi)$	$R \equiv a$?	$R \equiv a$ (pr. 5.2.12(2))
$4(a).\, K(\varphi \to K\psi) \to (\bar{K}\varphi \to K\psi)$	$R \equiv a$?	$R \equiv a$ (pr. 5.2.13(1))
$4(b).\, K(\varphi \to \bar{K}\psi) \to (\bar{K}\varphi \to \bar{K}\psi)$	$R \equiv a$?	$R \equiv a$ (pr. 5.2.13(2))
$5(a).\, K(\varphi \vee K\psi) \to (K\varphi \vee K\psi)$	$R \equiv 1$?	$R \equiv 1$ (pr. 5.2.14(1))
$5(b).\, K(\varphi \vee \bar{K}\psi) \to (K\varphi \vee \bar{K}\psi)$	$R \equiv 1$?	$R \equiv 1$ (pr. 5.2.14(2))
6. $(\bar{K}\varphi \& \bar{K}\varphi) \leftrightarrow \bar{K}(\varphi \& \varphi)$	scherpe R (pr. 5.2.16)	scherpe R (pr. 5.2.15(2))
$6'$. $(\bar{K}\varphi \& \bar{K}\varphi) \to \bar{K}(\varphi \& \varphi)$	/	willek. R (pr. 5.2.15(1))
A. $K\varphi \to \bar{K}\varphi$	ser. R (pr. 5.2.3)	ser. R (pr. 5.2.2)
B. $K\varphi \to \varphi$	refl. R (pr. 5.2.5(1))	refl. R (pr. 5.2.4(1))
C. $\varphi \to \bar{K}\varphi$	refl. R (pr. 5.2.5(2))	refl. R (pr. 5.2.4(2))
D. $\bar{K}K\varphi \to \varphi$	symm. R (pr. 5.2.7(1))	symm. R (pr. 5.2.6(1))
E. $\varphi \to K\bar{K}\varphi$	symm. R (pr. 5.2.7(2))	symm. R (pr. 5.2.6(2))
F. $\bar{K}K\varphi \to K\varphi$	T-Eucl. R (pr. 5.2.9(1))	T-Eucl. R (pr. 5.2.8(1))
G. $\bar{K}\varphi \to K\bar{K}\varphi$	T-Eucl. R (pr. 5.2.9(2))	T-Eucl. R (pr. 5.2.8(2))
H. $K\varphi \to KK\varphi$	T-tr. R (pr. 5.2.11(1))	T-tr. R (pr. 5.2.10(1))
I. $\bar{K}\bar{K}\varphi \to \bar{K}\varphi$	T-tr. R (pr. 5.2.11(2))	T-tr. R (pr. 5.2.10(2))
J. $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \psi)$	refl. R (pr. 5.2.18)	refl. R (pr. 5.2.17)
K. $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to \bar{K}\psi)$	ser. R (pr. 5.2.20)	ser. R (pr. 5.2.19)
L. $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$	scherpe R (pr. 5.2.23)	scherpe R (pr. 5.2.21)
M. $K(\bar{a} \to \varphi) \leftrightarrow (\bar{a} \to K\varphi)$	/	willek. R (pr. 5.2.24)
N. $(K\varphi \& K\psi) \to K(\varphi \& \psi)$	scherpe R (pr. 5.2.27)	scherpe R (pr. 5.2.25)
afleidingsregel	**nodige voorwaarde**	**voldoende voorwaarde**
O. $\frac{\varphi}{K\varphi}$	/	willek. R (pr. 5.2.28)
P. $\frac{\bar{a} \to \varphi}{\bar{a} \to K\varphi}$	/	willek. R (pr. 5.2.29)
Q. $\frac{\varphi \to \psi}{K\varphi \to K\psi}$	/	willek. R (pr. 5.2.30)

Tabel 5.2: Nodige en voldoende voorwaarden voor axioma's

We slaagden er niet in om voor axioma's 3 t.e.m. 5 te bewijzen dat de voldoende voorwaarden ook nodig waren. Dit zijn open problemen. Wel toonden we met voorbeelden aan (zie voorbeeld 11, 12 en 13) dat een T-equivalente toegankelijkheidsrelatie niet voldoende was opdat deze axioma's zouden gelden in een vaag Kripke model.

Gelijkenissen geldigheid axioma's scherpe en vage Kripke modellen

Als we deze tabel vergelijken met tabel 2.1 zien we dat de noodzakelijkheidsregel nog steeds voor willekeurige toegankelijkheidsrelaties geldt.

Verder komt axioma A overeen met het D-axioma in het scherpe geval, dat eveneens geldt voor seriële toegankelijkheidsrelaties, we bekomen m.a.w. dezelfde nodige en voldoende voorwaarde. Uiteraard mag hierbij niet vergeten worden dat de definitie van een seriële vaagrelatie ook een uitbreiding is van deze voor scherpe relaties. Merk ook op dat in het scherpe geval alle t-normen samenvallen.

Ook de nodige en voldoende voorwaarde voor axioma B is dezelfde als in het scherpe geval, nl. reflexiviteit van de toegankelijheidsrelatie. Aangezien er in de klassieke propositionele logica geldt dat $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$, is axioma B in het scherpe geval equivalent met $\neg\varphi \to \neg K\varphi$. In het klassieke geval hebben we eveneens dat $L_A = \neg L_A$ (i.e. $\{\varphi|\varphi \in L_A\} = \{\neg\varphi|\varphi \in L_A\}$) want de negatie is involutief. Bijgevolg kunnen we axioma B in het klassieke geval beschouwen als $\varphi \to \neg K\neg\varphi$. Als we nu de definitie van de scherpe duale operator in rekening brengen, zien we dat dit precies axioma C is. De nodige en voldoende voorwaarde is dus dezelfde voor scherpe als voor vage Kripke modellen, nl. een reflexieve toegankelijkheidsrelatie. Tevens belangrijk om hierbij op te merken is dat de betekenis van *nodige voorwaarde* in het scherpe geval sterker was dan hetgeen we aantoonden bij de vage Kripke modellen ((5.2) t.o.v. (5.3)). Maar de zwakste van beide (5.3) geldt uiteraard voor scherpe en vage Kripke modellen. Het voldoende zijn van de voorwaarden werd wel op gelijke wijze geïnterpreteerd: (5.1) is de vage variant van (2.13) in die zin dat (5.1) beperkt tot scherpe waarden zich tot (2.13) herleidt.

Axioma H vinden we ook in het scherpe geval terug, onder dezelfde voorwaarden als in het vage geval, nl. T-transitviteit (wat zich herleidt tot transitiviteit in het scherpe geval). Gebruik makend van de definitie van de scherpe duale kennisoperator, $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$, $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$ en $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$, kunnen we axioma I in het scherpe geval omvormen:

$$\begin{aligned}(\bar{K}\bar{K}\varphi \to \bar{K}\varphi) &\leftrightarrow (\neg K\neg\neg K\neg\varphi \to \neg K\neg\varphi) \leftrightarrow (\neg KK\neg\varphi \to \neg K\neg\varphi)\\ &\leftrightarrow (\neg\neg K\neg\varphi \to \neg\neg KK\neg\varphi) \leftrightarrow (K\neg\varphi \to KK\neg\varphi)\end{aligned}$$

Steunend op $L_A = \neg L_A$ bekomen we in het scherpe geval dat axioma I ook geschreven kan worden als $K\varphi \to KK\varphi$. In het scherpe geval vallen axioma H en axioma I dus allebei samen met het positieve introspectie-axioma. Aangezien de nodige en voldoende voorwaarde voor axioma H dezelfde zijn als voor axioma I en dezelfde als in het scherpe geval, kunnen we opnieuw concluderen dat de resultaten van het scherpe en het vage geval overeenkomen.

Axioma G vinden we ook in het scherpe geval terug, onder dezelfde voorwaarden als in het vage geval, nl. T-Eucliditeit (de vage variant van scherpe Eucliditeit). Gebruik makend van dezelfde argumenten, nl. de definitie van de scherpe duale kennisoperator, $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$ en $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$, kunnen we axioma F in het scherpe geval omvormen:

$$(\bar{K}K\varphi \to K\varphi) \leftrightarrow (\neg K\neg K\varphi \to K\varphi) \leftrightarrow (\neg K\varphi \to \neg\neg K\neg K\varphi) \leftrightarrow (\neg K\varphi \to K\neg K\varphi)$$

Steunend op $L_A = \neg L_A$ bekomen we in het scherpe geval dat axioma F ook geschreven kan worden als $\neg K\neg\varphi \to K\neg K\neg\varphi$, wat wegens de definitie van de scherpe duale kennisoperator equivalent is met $\bar{K}\varphi \to K\bar{K}\varphi$. In het scherpe geval vallen axioma F en axioma G m.a.w. allebei samen met het negatieve introspectie-axioma. Aangezien de nodige en voldoende voorwaarde voor axioma G dezelfde zijn als voor axioma F en dezelfde als in het scherpe geval, kunnen we ook hier concluderen dat de resultaten van het vage geval het scherpe geval uitbreiden.

Verder vinden we ook axioma E in het scherpe geval terug, met als nodige en voldoende voorwaarde op de toegankelijkheidsrelatie eveneens symmetrie. Als we steunen op de definitie van de scherpe duale kennisoperator, $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$, $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$, dan kunnen we axioma D in het scherpe geval omvormen:

$$(\bar{K}K\varphi \to \varphi) \leftrightarrow (\neg K\neg K\varphi \to \varphi) \leftrightarrow (\neg\varphi \to \neg\neg K\neg K\varphi) \leftrightarrow (\neg\varphi \to K\neg K\varphi)$$

Steunend op $L_A = \neg L_A$ bekomen we in het scherpe geval dat axioma D ook geschreven kan worden als $\varphi \to K\neg K\neg\varphi$, wat wegens de definitie van de scherpe duale kennisoperator equivalent is met $\varphi \to K\bar{K}\varphi$. In het scherpe geval vallen axioma D en axioma E dus samen. Aangezien de nodige en voldoende voorwaarde voor axioma E dezelfde zijn als voor axioma D en dezelfde als in het scherpe geval, kunnen we opnieuw concluderen dat de resultaten van het scherpe en het vage geval overeenkomen. $\square$

Verschillen geldigheid axioma's scherpe en vage Kripke modellen

Zoals we reeds opmerkten, is het nodig zijn van de voorwaarden op de toegankelijkheidsrelatie R opdat de axioma's B, C, D, E, F, G, H en I zouden gelden in de vage Kripke modellen minder sterk aangetoond dan bij de scherpe Kripke modellen. We toonden namelijk (5.3) aan en niet (5.2), wat de vage variant is van het nodig zijn van een voorwaarde in het scherpe geval (zie (2.14)).

In het vage geval zijn we er niet in geslaagd om het K-axioma (i.e. $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$, het axioma L uit tabel 5.2) aan te tonen voor een vaag Kripke model met een willekeurige toegankelijkheidsrelatie. Dit axioma is enkel geldig indien de toegankelijkheidsrelatie scherp is en voor vage Kripke modellen met Archimedische t-normen is dit ook een nodige voorwaarde. $\square$

Stel dat we de basislogica BL uitbreiden met bepaalde axioma's en afleidingsregels uit tabel 5.2. We kunnen dan de klasse van vage Kripke modellen $\mathcal{M}$ beschouwen waarvan de toegankelijkheidsrelatie R alle voldoende voorwaarden van deze axioma's en afleidingsregels bezit. De correctheid van dit axiomasysteem t.o.v. deze klasse vage Kripke modellen volgt dan automatisch aangezien we de toegankelijkheidsrelatie R precies zo gekozen werd dat elk axioma geldig is in elk vaag Kripke model $M \in \mathcal{M}$ en elke afleidingsregel de geldigheid van elke $\mathcal{M}$-tautologie bewaart. De volledigheid moet dan nog onderzocht worden. Mogelijks ontbreken er nog axioma's of afleidingsregels opdat volledigheid zou gelden.

5.3 Volledigheid

Zoals we reeds vermeldden, zijn er in de literatuur verschillende methoden waarop volledigheid van een axiomasysteem t.o.v. een klasse modellen wordt aangetoond. Volgens definitie 5.1.2 houdt dit in dat elke tautologie van de klasse modellen een stelling is van het axiomasysteem. In het scherpe geval hebben we de bewijsmethode hiervoor geschetst als de constructie van een model uit de klasse waarvoor geldt dat elke formule die geen stelling is van het axiomasysteem waarheidswaarde 0 heeft. We noemden dit model het canonisch model (zie definitie 2.2.10). Het moeilijkste onderdeel van deze methode in het vage geval is het vinden van de "juiste" definities voor de begrippen *consistentie* (zie definitie 2.2.8) en *maximaliteit* (zie definitie 2.2.9), aangezien deze begrippen leiden tot de definitie van het canonisch model. Verkeerd gekozen definities zullen immers niet tot de gewenste fundamentele stelling van het canonisch model leiden (zie stelling 2.2.4) of kunnen mogelijk leiden tot een canonisch model dat niet eens tot de beschouwde klasse modellen behoort. Bij het ondernemen van enkele pogingen tot het uitbreiden van bovenstaande begrippen, werd al gauw duidelijk dat dit geen evidente opdracht is. Gelukkig is er in de literatuur ook zo'n uitbreiding te vinden bij Mironov [19]. Er zijn inhoudelijk verschillen tussen de vaagmodale logica en bijhorende semantiek van Mironov en de onze. Zo werkt Mironov met een complete tralie (zie definitie 3.2.5) voor de waarheidswaarden en logische constanten, gebruikt hij geïndexeerde modale operatoren en geldt er dat de negatie involutief is. De structuur van de Kripke modellen komt ook niet volledig overeen: Mironov gebruikt geïndexeerde toegankelijkheidsrelaties en een lidmaatschapsgraad van elke wereld in de verzameling van mogelijke werelden. Er zijn echter genoeg overeenkomsten om aan te nemen dat de bewijsmethode die Mironov hanteert bij ons toepasbaar zou kunnen zijn, mits aanpassing uiteraard, of toch zeker indien we ons beperken tot t-normen met een involutieve negator. Mironovs bewijsmethode bestaat uit een aaneenschakeling van definities en stellingen waarvan we reeds een deel succesvol wisten te vertalen. In het scherpe geval wordt gebruik gemaakt van het feit dat elke consistente verzameling een maximaal consistente uitbreiding heeft (zie propositie 2.2.3). Analoog hebben we dit nodig in het vage geval. In het bewijs van deze stelling gaat Mironov er echter impliciet vanuit dat de formules in de vaagmodale taal aftelbaar zijn door aan te nemen dat je ze in een lijst $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ kan zetten. Maar zo'n lijst bestaat niet indien elk element uit het eenheidsinterval een logische constante is. We zouden dit kunnen oplossen door enkel de rationale getallen uit het eenheidsinterval als logische constanten en mogelijke waarheidswaarden te beschouwen, maar dan komen we al veel vlugger in de problemen: Mironovs theorie steunt namelijk sterk op de assumptie dat, als $\overline{b_i} \to \varphi$, $\forall i \in I$, tot de vaagmodale logica behoren (of m.a.w. stellingen zijn van het overeenkomstig axiomasysteem), dat dan eveneens $\overline{\sup\{b_i | i \in I\}} \to \varphi$ tot de vaagmodale logica behoort. Dit is op semantisch niveau bij Mironov gegarandeerd omdat hij met een complete tralie werkt. Maar aangezien het supremum van een verzameling rationale getallen niet noodzakelijk rationaal is, kunnen we hier niet op steunen als we de constanten in de vaagmodale taal beperken tot $[0, 1] \cup \mathbb{Q}$. Deze methode lijkt dus in het water te vallen.

Een andere bewijsmethode is het gebruik van filters en congruentierelaties, zoals we o.a. bij Hájek [10] terugvinden. Ook Van Gasse et al. pasten deze techniek toe in [15] over intervalwaardige vaaglogica's. Aangezien Hájeks bewijs voor de correctheid en de volledigheid van axiomasysteem 5.2.2 t.o.v. de klasse vage Kripke modellen volgens defintie 4.2.3 steunt op de overeenkomst met een vage predicatenlogica [10], kunnen we eveneens proberen om de technieken uit deze vage predicatenlogica te vertalen en uit te breiden naar de vaagmodale logica uit dit werk. Dit valt echter buiten het bestek van deze masterproef.

Hoofdstuk 6

Conclusie

We vertrekken in dit werk van scherpe Kripke modellen. We behandelen verschillende axiomasystemen (modale epistemische logica's) en hun correctheid en volledigheid t.o.v. bepaalde klasse Kripke modellen. We werken steeds in detail uit wat de nodige en voldoende voorwaarden op de toegankelijkheidsrelatie R zijn opdat de axioma's uit de verscheidene axiomasystemen zouden gelden in bepaalde klassen van Kripke modellen.

A.d.h.v. gekende vage definities en eigenschappen breiden we de modale epistemische logica's en scherpe Kripke modellen uit naar vaagmodale epistemische logica's en vage Kripke modellen. Dit kan op verschillende manieren aangezien er meerdere aspecten van Kripke modellen vervaagd kunnen worden. We opteren ervoor om zowel de waarheidswaarden als de toegankelijkheidsrelatie te vervagen m.b.v. de definities uit [14]. We onderzoeken de geldigheid van verschillende axioma's en afleidingsregels in deze modellen en gaan na welke de nodige en voldoende voorwaarden zijn op de toegankelijkheidsrelatie R. De resultaten van de axioma's uit [14] worden overgenomen, alsook de bewijstechniek. De bewijzen werken we in detail uit. De geldigheid van alle andere axioma's en afleidingsregels onderzoeken we zelf, maar de inspiratie voor de axioma's en afleidingsregels op zich halen we o.a. uit [4, 10]. De resultaten worden gebundeld in tabel 5.2. Belangrijk hierbij is de manier waarop een *nodige voorwaarde* gepercipieerd wordt. In het vage geval zijn er namelijk 3 varianten, die van sterk naar zwak geordend kunnen worden. I.h.b. onderzoeken we de axioma's en afleidingsregels die aan bod kwamen bij de scherpe Kripke modellen om de nodige en voldoende voorwaarden te kunnen vergelijken. We concluderen dat de nodige en voldoende voorwaarden bij alle axioma's en afleidingsregels dezelfde blijven, op uitzondering van het K-axioma. In het vage geval is de negatie niet meer involutief, waardoor de duale kennisoperator niet gedefinieerd kan worden a.d.h.v. de kennisoperator zelf. Daardoor zijn er meestal twee axioma's die in het scherpe geval te herleiden zijn tot één en hetzelfde axioma. Deze koppels van axioma's hebben in het vage geval onderling dezelfde nodige en voldoende voorwaarden.

De axioma's en afleidingsregels uit tabel 5.2 kunnen inspireren om een axiomasysteem samen te stellen dat correct en volledig is t.o.v. een klasse vage Kripke modellen waarvan de toegankelijkheidsrelatie aan de corresponderende voorwaarden uit de tabel moet voldoen. Men kan ook omgekeerd te werk gaan door een klasse toegankelijkheidsrelaties vast te leggen, alle axioma's en afleidingsregels uit de tabel die voor zulke relaties gelden te bundelen en na te gaan of dit axiomasysteem volledig is t.o.v. de klasse vage Kripke modellen met zulke toegankelijkheidsrelatie. Indien niet zullen extra axioma's of afleidingsregels nodig zijn, waarvan de geldigheid nog onderzocht moet worden. Met het oog op toepassingen zou men bijvoorbeeld kunnen opteren om enkel vage Kripke modellen te beschouwen waarvan de toegankelijkheid beschreven wordt door een similariteitsrelatie. In dit werk onderzoeken we (de haalbaarheid van) enkele mogelijke pistes om een correct en volledig axiomasysteem t.o.v. een bepaalde klasse vage Kripke modellen te vinden. De eerste piste is het uitbreiden van axiomasysteem 5.2.3 (vage **S5**) en de corresponderende klasse vage Kripke modellen [10], aangezien de correctheid en volledigheid hiervan reeds aangetoond werden in [10, 11]. De resultaten uit dit werk tonen echter aan dat deze piste doodloopt. Deze techniek kan immers enkel werken indien we voor elk axioma van vage **S5** een voldoende voorwaarde vinden op de toegankelijkheidsrelatie R zodanig dat het axioma geldt. Nu blijkt dat zo'n voorwaarde voor bepaalde axioma's niet bestaat zonder dat we terug belanden in het geval $R \equiv 1$ of een praktisch onbruikbaar geval (zoals $R \equiv a$ met $a \in [0, 1]$). Een poging tot aanpassen van Mironovs bewijsmethode [19] lijkt voorlopig ook dood te lopen, tenzij we een manier vinden om een mouw te passen aan de problemen die het incorporeren van deze techniek tot nu toe met zich meebrengt (zie sectie 5.3). Andere opties, zoals het gebruik van filters en congruentierelaties of een bewijsmethode gebaseerd op die bij vage predicatenlogica [10], zijn niet uitgesloten en kunnen in de toekomst nog onderzocht worden.

Bijlage A

Matlab-experiment

A.1 Geldigheid axioma's onder verschillende toegankelijkheidsrelaties

Hieronder geven we de waarden van de toegankelijkheidsrelaties die gebruikt werden om op zoek te gaan naar mogelijke nodige of voldoende voorwaarden voor axioma's. Andere parameters van de vage Kripke modellen worden eveneens toegelicht.

- $S = \{s, t, u, v, w\}$.
- $A = \{p, q, r\}$.
- WW: matrix voor de interpretatie van de proposities per wereld $\pi(.)(.)$ (rijen komen overeen met werelden, kolommen met proposities). In het experiment worden er 500 keer 15 waarden getrokken uit de verzameling $\{0.0, 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 1.0\}$, waarvoor dan telkens voor elke t-norm en elke toegankelijkheidsrelatie de waarheidswaarden van een instantie van de axioma's berekend worden.
- $R0$: een zwak reflexieve vaagrelatie

$R0(.,.)$	s	t	u	v	w
s	0.8	0.1	0.1	0.1	0.1
t	0.2	0.8	0.2	0.2	0.2
u	0.3	0.3	0.8	0.3	0.3
v	0.4	0.4	0.4	0.8	0.4
w	0.5	0.5	0.5	0.5	0.8

- $R1$: een reflexieve (en dus ook seriële), niet-symmetrische vaagrelatie

$R1(.,.)$	s	t	u	v	w
s	1	0.4	0.7	0.8	0.2
t	0.9	1	0.4	0.8	0.9
u	0.1	0.5	1	0.6	0.3
v	0.8	0.7	0.5	1	0.6
w	0.3	0.2	0.7	0.4	1

- $R2$: een seriële, niet-symmetrische vaagrelatie

$R2(.,.)$	s	t	u	v	w
s	0.7	1	0.7	0.8	0.2
t	0.9	0.7	0.4	1	0.9
u	0.1	0.5	0.7	0.6	1
v	0.8	0.7	1	0.7	0.6
w	1	0.2	0.7	0.4	0.7

- $R3$: een symmetrische, niet-seriële vaagrelatie

$R3(.,.)$	s	t	u	v	w
s	0.5	0.3	0.7	0.8	0.2
t	0.3	0.8	0.4	0.6	0.9
u	0.7	0.4	0.1	0.1	0.5
v	0.8	0.6	0.1	0.2	0.6
w	0.2	0.9	0.5	0.6	0.6

- $R4$: een symmetrische, seriële vaagrelatie

$R4(.,.)$	s	t	u	v	w
s	0.5	1	0.7	0.8	0.2
t	1	0.3	1	0.7	0.9
u	0.7	1	0.5	1	0
v	0.8	0.7	1	0.6	1
w	0.2	0.9	0	1	0.7

- $R5$: een symmetrische, reflexieve vaagrelatie

$R5(.,.)$	s	t	u	v	w
s	1	0.3	0.7	0.8	0.2
t	0.3	1	0.4	0.6	0.9
u	0.7	0.4	1	0.1	0.5
v	0.8	0.6	0.1	1	0.6
w	0.2	0.9	0.5	0.6	1

- $R6$: een T-Euclidische, symmetrische (en dus ook T-transitieve) vaagrelatie, voor elke $s, t \in S$ gedefinieerd als $R(s,t) = 0.5$.

- $R7$: een reflexieve, symmetrische en T-transitieve (dus ook T-Euclidische) vaagrelatie voor $T = T_P$ en $T = T_L$, NIET voor $T = T_M$!

$R7(.,.)$	s	t	u	v	w
s	1	0.5	0.4	0.6	0.3
t	0.5	1	0.3	0.4	0.5
u	0.4	0.3	1	0.5	0.6
v	0.6	0.4	0.5	1	0.3
w	0.3	0.5	0.6	0.3	1

- $R8$: een vaagrelatie zonder bijzondere eigenschappen

$R8(.,.)$	s	t	u	v	w
s	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
t	0.6	0.7	0.8	0.9	0.2
u	0.5	0.5	0.6	0.6	0.4
v	0.2	0.7	0.8	0.5	0.3
w	0.3	0.6	0	0	0.8

- $R9$: de vaagrelatie uit [10,11] ($R(s,t) = 1, \forall s,t \in S$)
- $R10$: een scherpe relatie

$R10(.,.)$	s	t	u	v	w
s	0	0	1	0	0
t	1	0	1	1	0
u	1	0	0	0	0
v	0	0	1	1	1
w	1	0	0	0	1

- $R11$: een vaagrelatie die net niet identisch is ($R11 = R6$ met $R11(s,s) = 0.4$)
- $R12$: een vaagrelatie die net niet scherp is ($R12 = R10$ met $R12(s,s) = 0.5$)

Opmerking A.1.1
Merk op dat voor $R6$ ook T-cotransitiviteit geldt aangezien enerzijds $\mathrm{co}_{N_L}(R6) = R6$ en $R6$ T_L-transtief is en anderzijds $\mathrm{co}_{N_P}(R6) = N_M(R6) = \phi$ en dus i.h.b. T_L-transitief. Voor $R7$ bekomen we $\mathrm{co}_{N_P}(R7) = \mathrm{co}_{N_M}(R_7) = \phi$, wat opnieuw T_P-transitief is, en

$\mathrm{co}_{N_L}(R7(.,.))$	s	t	u	v	w
s	0	0.5	0.6	0.4	0.7
t	0.5	0	0.7	0.6	0.5
u	0.6	0.7	0	0.5	0.4
v	0.4	0.6	0.5	0	0.7
w	0.7	0.5	0.4	0.7	0

Opdat deze vaagrelatie T_L-transitief is moet $\max(0, R(a,b) + R(b,c) - 1) \leq R(a,c)$, $\forall a,b,c \in S$. Als we echter $\max(0, R(s,w) + R(w,s) - 1)$ uitrekenen, bekomen we 0.4, wat duidelijk niet kleiner is of gelijk aan $R(s,s) = 0$. $R7$ is dus wel T_P- en T_M-cotransitief, maar niet T_L-cotransitief. □

We voeren ons experiment 500 maal uit door verschillende waarheidswaarden voor de atomische proposities in de werelden te hanteren. We gebruiken 3 verschillende t-normen (de Łukasiewicz t-norm, het algebraïsch product en het minimum) en 13 verschillende relaties. We onthouden per axioma, per norm en per relatie wat de minimum waarheidswaarde voor een instantie van het axioma was, aangezien er pas sprake kan zijn van een axioma als dit altijd waarde 1 oplevert. In onderstaande tabellen worden de resultaten van deze uitvoeringen weergegeven door te vermelden onder welke vaagrelaties het axioma geldig was dus m.a.w. waarde 1 opleverde (toegepast op onze 500 specifieke gevallen, dus dit wil natuurlijk nog niet zeggen dat het algemeen geldig is).

axioma-instantie	Łuk. t-norm	alg. product	minimum
3(a)$K(Kq \to p) \to (Kq \to Kp)$	$R\{6, 9\}$	$R\{0, 6, 9\}$	$R\{0, 6, 9, 11\}$
3(b)$K(\bar{K}q \to p) \to (\bar{K}q \to Kp)$	$R\{0, 1, 6, 8, 9, 11\}$	$R\{0, 6, 9, 11\}$	$R\{0, 6, 7, 9, 11\}$
4(a)$K(p \to Kq) \to (\bar{K}p \to Kq)$	$R\{0, 6, 8, 9, 11\}$	$R\{0, 6, 9, 11\}$	$R\{0, 2, 6, 7, 9, 11\}$
4(b)$K(p \to \bar{K}q) \to (\bar{K}p \to \bar{K}q)$	$R\{6, 9\}$	$R\{6, 9\}$	$R\{0, 6, 9\}$
5(a)$K(Kq \vee p) \to (Kq \vee Kp)$	$R9$	$R9$	$R\{6, 9, 11\}$
5(b)$K(\bar{K}q \vee p) \to (\bar{K}q \vee Kp)$	$R9$	$R9$	$R9$
6 $\bar{K}(p\&p) \leftrightarrow (\bar{K}p\&\bar{K}p)$	$R\{9, 10\}$	$R\{9, 10\}$	alle R
K $K(p \to q) \to (Kp \to \bar{K}q)$	$R\{1, 2, 4, 5,$ $7, 9, 10, 12\}$	$R\{1, 2, 4, 5,$ $7, 9, 10, 12\}$	$R\{1, 2, 3, 4, 5,$ $7, 9, 10, 11\}$
J $K(p \to q) \to (Kp \to q)$	$R\{1, 5, 7, 9\}$	$R\{1, 5, 7, 9\}$	$R\{1, 2, 4, 5, 7, 9\}$
L $K(p \to q) \to (Kp \to Kq)$	$R\{9, 10\}$	$R\{9, 10\}$	alle R
N $(Kp\&Kq) \to K(p\&q)$	$R\{9, 10\}$	$R\{9, 10\}$	alle R

In onderstaande tabel vermelden we in de tweede kolom de strengste (combinatie van) voorwaarden waarvoor het axioma niet geldt. Het onvoldoende zijn van zwakkere voorwaarden volgt hier logischerwijze uit. In de derde kolom staan de mogelijk voldoende voorwaarden (uit de onderzochte opties).

axioma	onvoldoende vwden	mogelijk voldoende vwden
3(a) $K(Kq \to p) \to (Kq \to Kp)$	T-equivalentie	identisch a
3(b) $K(\bar{K}q \to p) \to (\bar{K}q \to Kp)$	T-equivalentie	identisch a
4(a) $K(p \to Kq) \to (\bar{K}p \to Kq)$	T-equivalentie	identisch a
4(b) $K(p \to \bar{K}q) \to (\bar{K}p \to \bar{K}q)$	T-equivalentie	identisch a
5(a) $K(Kq \vee p) \to (Kq \vee Kp)$	T-equivalentie identisch a	identisch 1
5(b) $K(\bar{K}q \vee p) \to (\bar{K}q \vee Kp)$	T-equivalentie identisch a	identisch 1
6 $\bar{K}(p\&p) \leftrightarrow (\bar{K}p\&\bar{K}p)$	T-equivalentie	scherp
K $K(p \to q) \to (Kp \to \bar{K}q)$	T-trans. + symm. zwak refl.	serieel reflexief serieel + symm. refl. + symm. T-equivalentie
J $K(p \to q) \to (Kp \to q)$	T-trans. + symm. zwak refl.	reflexief
L $K(p \to q) \to (Kp \to Kq)$	T-equivalentie	scherp
N $(Kp\&Kq) \to K(p\&q)$	T-equivalentie	scherp

Tabel A.1: Onvoldoende en mogelijk voldoende voorwaarden per axioma

Hieronder de Matlabcode van het experiment.

```
% Experiment in Matlab
%----------------------
% Doelstelling: verificatie geldigheid axioma's
% auteur: Sofie De Clercq

function axioms()

% Deel 1: functies definieren
%===========================

no=3; %aantal t-normen

%t-norm T1
function[T1]=T1(a,b,tnorm)
    if tnorm==1
        %Lukasiewicz
        T1=max(0,a+b-1);
    elseif tnorm==2
        %algebraisch product
        T1=a*b;
    elseif tnorm==3
        T1=min(a,b);
    end
end

%geinduceerde residuele implicator bij T1 nl. I1
function[I1]=I1(a,b,tnorm)
    if tnorm==1
        %lukasiewicz
        I1=min(1,1-a+b);
    elseif tnorm==2
        %gaines
        if a<=b
            I1=1;
        else
            I1=b/a;
        end
    elseif tnorm==3
        %gdel
        if a<=b
            I1=1;
        else
            I1=b;
        end
    end
end
```

```
%sterke conjunctie &
function[con]=con(p,q,WW,s,tnorm)
    con=T1(WW(s,p),WW(s,q),tnorm);
end

%implicatie
function[imp]=imp(p,q,WW,s,tnorm)
    imp=I1(WW(s,p),WW(s,q),tnorm);
end

%kennisoperator
function[ken]=ken(p,WW,s,R,tnorm)
    h=ones(1,5);
    for c3=1:5
        h(c3)=I1(R(s,c3),WW(c3,p),tnorm);
    end
    ken=min(h);
end

%duale kennisoperator
function[dk]=dk(p,WW,s,R,tnorm)
    g=ones(1,5);
    for c2=1:5
        g(c2)=T1(R(s,c2),WW(c2,p),tnorm);
    end
    dk=max(g);
end

% Deel 2: Verschillende soorten vaagrelaties definieren
%=======================================================

rel=13; %aantal relaties
%Maak matrix met alle relaties onder elkaar
REL=ones(rel*5,5);

%R0:zwak refl, niet symm of serieel
for i=1:5
    REL(i,i)=0.8;
    for j=(i+1):5
        REL(i,j)=0.1*(i);
        REL(j,i)=0.1*(j);
    end
end

%R1:reflexieve relatie (dus automatisch serieel), niet symm
REL(6:10,1:5)=[[1,0.4,0.7,0.8,0.2];[0.9,1,0.4,0.8,0.9];
    [0.1,0.5,1,0.6,0.3];[0.8,0.7,0.5,1,0.6];[0.3,0.2,0.7,0.4,1]];
```

```
%R2:serile relatie, niet refl
REL(11:15,1:5)=[[0.7,1,0.7,0.8,0.2];[0.9,0.7,0.4,1,0.9];
    [0.1,0.5,0.7,0.6,1];[0.8,0.7,1,0.7,0.6];[1,0.2,0.7,0.4,0.7]];

%R3:symmetrische relatie, niet serieel
REL(16:20,1:5)=[[0.5,0.3,0.7,0.8,0.2];[0.3,0.8,0.4,0.6,0.9];
    [0.7,0.4,0.1,0.1,0.5];[0.8,0.6,0.1,0.2,0.6];[0.2,0.9,0.5,0.6,0.6]];

%R4:symmetrische seriele relatie
REL(21:25,1:5)=[[0.5,1,0.7,0.8,0.2];[1,0.3,1,0.7,0.9];[0.7,1,0.5,1,0];
    [0.8,0.7,1,0.6,1];[0.2,0.9,0,1,0.7]];

%R5:symmetrische reflexieve relatie
REL(26:30,1:5)=REL(16:20,1:5);
for i=1:5
    REL(25+i,i)=1;
end

%R6:t-Euclidische, t-transitieve, symmetrische relatie
for i=1:5
    for j=i:5
        REL(i+30,j)=0.5;
        REL(j+30,i)=0.5;
    end
end
for k=1:no
    for x=1:5
        for y=1:5
            for z=1:5
                if T1(REL(30+z,x),REL(30+z,y),k)> (REL(30+x,y)+0.00001)
                display('mislukt R6');display(k);
                end
            end
        end
    end
end

%R7:symm, reflexief en t-transitief (tov alg prod, luk maar nt t.o.v. min!)
REL(36:40,1:5)=[[1,0.5,0.4,0.6,0.3];[0.5,1,0.3,0.4,0.5];
    [0.4,0.3,1,0.5,0.6];[0.6,0.4,0.5,1,0.3];[0.3,0.5,0.6,0.3,1]];
for k=1:no
    for x=1:5
        for y=1:5
            for z=1:5
                if T1(REL(35+z,x),REL(35+z,y),k) > (REL(35+x,y)+0.00001)
                    display('mislukt R7');display(k);
                end
            end
```

```
        end
    end
end

%R8:'niets'
REL(41:45,1:5)=[[0.1,0.2,0.3,0.4,0.5];[0.6,0.7,0.8,0.9,0.2];
    [0.5,0.5,0.6,0.6,0.4];[0.2,0.7,0.8,0.5,0.3];[0.3,0.6,0,0,0.8]];

%R9:Hajek (er staat al 1)

%R10:scherp
REL(51:55,1:5)=[[0,0,1,0,0];[1,0,1,1,0];
   [1,0,0,0,0];[0,0,1,1,1];[1,0,0,0,1]];

%R11: niet identisch a
REL(56:60,1:5)=REL(31:35,1:5);
REL(56,1)=0.4;

%R12:niet scherp
REL(61:65,1:5)=REL(51:55,1:5);
REL(61,1)=0.5;

display(REL);

% Deel 3: Experiment
%====================

% A = verzameling van atomische proposities p=1,q=2,r=3
% S = verzameling van werelden:s=1,t=2,u=3,v=4,w=5
% WW= waarheidswaarden per wereld

n=500; %aantal experimenten
%per lus: 2 normen met elk 10 relaties => 20 waarden
WW=zeros(5,3);
%[[0.4,0.6,0.9];[0.5,0.3,1];[0.1,0.7,0.8];[0.5,0.5,0.5];[0.3,0.9,0.2]];
RES=ones(no*rel,11);%matrix met wwde per axioma (kolommen)
%per rij: per norm, dan per relatie (1e rij:luk,R0, 2e rij:luk,R1 enz.)
p=1;q=2;
s=1;
for exp=1:n
    % genereer waarheidswaarden
    for k=1:5
        for l=1:3
            WW(k,l)=(unidrnd(11)-1)/10;%trek een natuurlijk getal van 1
            %tot 11, trek er 1 vanaf en deel door 10
            %=> we krijgen mogelijke waarden 0.0,0.1,0.2,0.3,...,1.0
        end
    end
```

```
%beginnen met Lukasiewicz (norm=1), dan algebrasch product(norm=2)
for norm=1:no
    for r=0:(rel-1)
        R=REL((r*5+1):((r+1)*5),1:5);
        %axioma 3
        %a: K(Kq -> p) -> (Kq -> Kp)
        %b: K(dKq -> p) -> (dKq -> Kp)
        psi1=ones(1,5);
        psi2=psi1;
        for i=1:5
            psi1(i)=ken(q,WW,i,R,norm);%psi1=Kq in wereld i
        end
        for i=1:5
            psi2(i)=dk(q,WW,i,R,norm);%psi2=dKq in i
        end
        piq1=ones(1,5);
        for i=1:5
            piq1(i)=I1(psi1(i),WW(i,p),norm);%Kq impliceert p in i
        end
        piq2=ones(1,5);
        for i=1:5
            piq2(i)=I1(psi2(i),WW(i,p),norm);%dKq impliceert p in i
        end
        x1=ones(1,5);
        for i=1:5
            x1(i)=I1(R(s,i),piq1(i),norm);
        end
        kpiq1=min(x1);%linkerkant met Kq in s
        for i=1:5
            x1(i)=I1(R(s,i),piq2(i),norm);
        end
        kpiq2=min(x1);%linkerkant met dKq in s
        kp=ken(p,WW,s,R,norm);%Kp in s
        kqikp1=I1(psi1(s),kp,norm);%rechterkant in s
        kqikp2=I1(psi2(s),kp,norm);%rechterkant in s
        ax3a=I1(kpiq1,kqikp1,norm);
        ax3b=I1(kpiq2,kqikp2,norm);
        RES(rel*(norm-1)+(r+1),1)=min(ax3a,RES(rel*(norm-1)+(r+1),1));
        RES(rel*(norm-1)+(r+1),2)=min(ax3b,RES(rel*(norm-1)+(r+1),2));
        %voor vaste norm en relatie behouden we het minumum over alle
        %experimenten (dit zal dus enkel 1 zijn als het axioma telkens
        %voldaan was)

        %axioma 4
        %a: K(p -> Kq) -> (dKp -> Kq)
        %b: K(p -> dKq) -> (dKp -> dKq)
        pikq1=ones(1,5);
        pikq2=pikq1;
```

```
for i=1:5
    pikq1(i)=I1(R(s,i),I1(WW(i,p),psi1(i),norm),norm);
    %I(R(s,i),p impl Kq in i)
    pikq2(i)=I1(R(s,i),I1(WW(i,p),psi2(i),norm),norm);
    %I(R(s,i),p impl dKq in i)
end
kpiq1=min(pikq1);%linkerkant in s
kpiq2=min(pikq2);
dp=dk(p,WW,s,R,norm);
dpiq1=I1(dp,psi1(s),norm);%rechterkant in s
dpiq2=I1(dp,psi2(s),norm);
ax4a=I1(kpiq1,dpiq1,norm);
ax4b=I1(kpiq2,dpiq2,norm);
RES(rel*(norm-1)+(r+1),3)=min(ax4a,RES(rel*(norm-1)+(r+1),3));
RES(rel*(norm-1)+(r+1),4)=min(ax4b,RES(rel*(norm-1)+(r+1),4));

%axioma 5
%a: K(Kq v p) -> (Kq v Kp)
%b: K(dKq v p) -> (dKq v Kp)
poq1=ones(1,5);
for i=1:5
    poq1(i)=max(WW(i,p),psi1(i)); %Kq v p in i
end
poq2=ones(1,5);
for i=1:5
    poq2(i)=max(WW(i,p),psi2(i)); %dKq v p in i
end
x=ones(1,5);
for i=1:5
   x(i)=I1(R(s,i),poq1(i),norm);
end
kpokq1=min(x);%linkerkant a
for i=1:5
   x(i)=I1(R(s,i),poq2(i),norm);
end
kpokq2=min(x);%linkerkant b
kp=ken(p,WW,s,R,norm);
kpoq1=max(kp,psi1(s));%rechterkant a
kpoq2=max(kp,psi2(s));%rechterkant b
ax5a=I1(kpokq1,kpoq1,norm);
ax5b=I1(kpokq2,kpoq2,norm);
RES(rel*(norm-1)+(r+1),5)=min(ax5a,RES(rel*(norm-1)+(r+1),5));
RES(rel*(norm-1)+(r+1),6)=min(ax5b,RES(rel*(norm-1)+(r+1),6));

%axioma 6
%dK(p&p) <-> (dKp & dKp)
dp=dk(p,WW,s,R,norm);%dKp
dpedp=T1(dp,dp,norm);%rechterkant
```

```
pep=ones(1,5);
for i=1:5
    pep(i)=con(p,p,WW,i,norm);%p & p in i
end
x=ones(1,5);
for i=1:5
    x(i)=T1(R(s,i),pep(i),norm);
end
dpep=max(x);
ax6=T1(I1(dpedp,dpep,norm),I1(dpep,dpedp,norm),norm);
RES(rel*(norm-1)+(r+1),7)=min(ax6,RES(rel*(norm-1)+(r+1),7));

%eigen axioma (zou zeker moeten gelden voor refl R)
% K(p -> q) -> (Kp -> dKq)
piq=ones(1,5);
for i=1:5
    piq(i)=imp(p,q,WW,i,norm);
end
x=ones(1,5);
for i=1:5
   x(i)=I1(R(s,i),piq(i),norm);
end
kpiq=min(x);%linkerkant in s
kp=ken(p,WW,s,R,norm);
kpidq=I1(kp,psi2(s),norm);%rechterkant in s
axe1=I1(kpiq,kpidq,norm);
RES(rel*(norm-1)+(r+1),8)=min(axe1,RES(rel*(norm-1)+(r+1),8));

% eigen axioma (zou moeten gelden voor refl R)
% K(p -> q) -> (Kp -> q)
kpiqq=I1(kp,WW(s,q),norm);%rechterkant in s
axe2=I1(kpiq,kpiqq,norm);
RES(rel*(norm-1)+(r+1),9)=min(axe2,RES(rel*(norm-1)+(r+1),9));

% K-axioma
% K(p -> q) -> (Kp -> Kq)
kpikq=I1(kp,psi1(s),norm);%rechterkant in s
kax=I1(kpiq,kpikq,norm);
RES(rel*(norm-1)+(r+1),10)=min(kax,RES(rel*(norm-1)+(r+1),10));

% axioma Fitting
% Kp & Kq -> K(p & q)
kp=ken(p,WW,s,R,norm);
kq=ken(q,WW,s,R,norm);
kpekq=T1(kp,kq,norm); %linkerkant axioma
kenpeq=ones(1,5);
for m=1:5
    kenpeq(m)=I1(R(s,m),T1(WW(m,p),WW(m,q),norm),norm);
```

```
            end
            kpeq=min(kenpeq); %rechterkant axioma
            axf=I1(kpekq,kpeq,norm);
            RES(rel*(norm-1)+(r+1),11)=min(axf,RES(rel*(norm-1)+(r+1),11));
        end
    end
end
display(RES);display(WW);
end
```

A.2 Voorbeelden genereren

Bij het zoeken naar eenvoudige voorbeelden van vage Kripke modellen die aan bepaalde voorwaarden voldoen, gebruikten we steeds de Łukasiewics t-norm T_L en de volgende T_L-equivalente vaagrelatie R:

$R(.,.)$	s	t
s	1	0.5
t	0.5	1

Hieronder geven we de Matlabcode die we gebruikten om tegenvoorbeelden van bepaalde axioma-instanties te genereren. De output van deze code bezorgt ons de waarheidswaarde van de instantie (indien niet 1) en de waarheidswaarden van de atomische proposities per wereld die hiertoe leidden. Merk wel op dat een andere run tot andere voorbeelden kan leiden.

```
% Tegenvoorbeelden in Matlab
%--------------------------
% Doelstelling: tegenvoorbeelden voor axioma's vinden bij T-equivalentie
% auteur: Sofie De Clercq

function tegenvoorbeelden()

% Deel 1: functies definieren
%===========================

%t-norm T1
function[T1]=T1(a,b,tnorm)
    if tnorm==1
        %Lukasiewicz
        T1=max(0,a+b-1);
    elseif tnorm==2
        %algebraisch product
        T1=a*b;
    elseif tnorm==3
        T1=min(a,b);
    end
```

```
end

%geinduceerde residuele implicator bij T1 nl. I1
function[I1]=I1(a,b,tnorm)
    if tnorm==1
        %lukasiewicz
        I1=min(1,1-a+b);
    elseif tnorm==2
        %gaines
        if a<=b
            I1=1;
        else
            I1=b/a;
        end
    elseif tnorm==3
        %godel
        if a<=b
            I1=1;
        else
            I1=b;
        end
    end
end

%kennisoperator
function[ken]=ken(p,WW,s,R,tnorm)
    dim=size(WW);ww=dim(1);
    h=ones(1,ww);
    for c3=1:ww
        h(c3)=I1(R(s,c3),WW(c3,p),tnorm);
    end
    ken=min(h);
end

%duale kennisoperator
function[dk]=dk(p,WW,s,R,tnorm)
    dim=size(WW);ww=dim(1);
    g=ones(1,ww);
    for c2=1:ww
        g(c2)=T1(R(s,c2),WW(c2,p),tnorm);
    end
    dk=max(g);
end

% Deel 2: Verschillende soorten vaagrelaties definieren
%=========================================================

w=2; %aantal werelden
```

```
%we zoeken voorbeelden m.b.v. Lukasiewicz t-norm
norm=1;

%t-equivalente relatie: symm, reflexief en t-transitief (tov luk)
R(1:w,1:w)=[[1,0.5];[0.5,1]];
for x=1:w
    for y=1:w
        for z=1:w
            if T1(R(z,x),R(z,y),norm) > (R(x,y)+0.00001)
                display('mislukt R');
            end
        end
    end
end
display(R);

% Deel 3: Tegenvoorbeelden
%========================

% A = verzameling van atomische proposities p=1,q=2
% S = verzameling van werelden:s=1,t=2,u=3,v=4,w=5

a=2; %aantal atomische proposities
n=150; %aantal experimenten
WW=zeros(w,a);%waarheidswaarden per wereld
p=1;q=2;
s=1;
ok3a=false;ok3b=false;ok4a=false;ok4b=false;
ok5a=false;ok5b=false;
exp=1;
while ((ok3a==false)||(ok3b==false)||(ok4a==false)||(ok4b==false)||...
        (ok5a==false)||(ok5b==false)
    if exp<=n
        % genereer waarheidswaarden
        for k=1:w
            for l=1:a
                WW(k,l)=(unidrnd(11)-1)/10;%trek een natuurlijk getal van 1
                %tot 11, trek er 1 vanaf en deel door 10
                %=> we krijgen mogelijke waarden 0.0,0.1,0.2,0.3,...,1.0
            end
        end
        psi1=ones(1,w);
        psi2=psi1;
        for i=1:w
            psi1(i)=ken(q,WW,i,R,norm);%psi1=Kq in wereld i
        end
        for i=1:w
            psi2(i)=dk(q,WW,i,R,norm);%psi2=dKq in i
```

```
end
if ((ok3a==false) || (ok3b==false))
    %axioma 3
    %a: K(Kq -> p) -> (Kq -> Kp)
    %b: K(dKq -> p) -> (dKq -> Kp)
    piq1=ones(1,w);
    for i=1:w
        piq1(i)=I1(psi1(i),WW(i,p),norm);%Kq impliceert p in i
    end
    piq2=ones(1,w);
    for i=1:w
        piq2(i)=I1(psi2(i),WW(i,p),norm);%dKq impliceert p in i
    end
    x1=ones(1,w);
    for i=1:w
        x1(i)=I1(R(s,i),piq1(i),norm);
    end
    kpiq1=min(x1);%linkerkant met Kq in s
    for i=1:w
        x1(i)=I1(R(s,i),piq2(i),norm);
    end
    kpiq2=min(x1);%linkerkant met dKq in s
    kp=ken(p,WW,s,R,norm);%Kp in s
    kqikp1=I1(psi1(s),kp,norm);%rechterkant in s
    kqikp2=I1(psi2(s),kp,norm);%rechterkant in s
    ax3a=I1(kpiq1,kqikp1,norm);
    ax3b=I1(kpiq2,kqikp2,norm);
    if ax3a<0.999999999
        display(ax3a);display(WW);
        ok3a=true;
    end
    if ax3b<0.999999999
        display(ax3b);display(WW);
        ok3b=true;
    end
end
if ((ok4a==false) || (ok4b==false))
    %axioma 4
    %a: K(p -> Kq) -> (dKp -> Kq)
    %b: K(p -> dKq) -> (dKp -> dKq)
    pikq1=ones(1,w);
    pikq2=pikq1;
    for i=1:w
        pikq1(i)=I1(R(s,i),I1(WW(i,p),psi1(i),norm),norm);
        %I(R(s,i),p impl Kq in i)
        pikq2(i)=I1(R(s,i),I1(WW(i,p),psi2(i),norm),norm);
        %I(R(s,i),p impl dKq in i)
    end
```

```
        kpiq1=min(pikq1);%linkerkant in s
        kpiq2=min(pikq2);
        dp=dk(p,WW,s,R,norm);
        dpiq1=I1(dp,psi1(s),norm);%rechterkant in s
        dpiq2=I1(dp,psi2(s),norm);
        ax4a=I1(kpiq1,dpiq1,norm);
        ax4b=I1(kpiq2,dpiq2,norm);
        if ax4a<0.999999999
            display(ax4a);display(WW);
            ok4a=true;
        end
        if ax4b<0.999999999
            display(ax4b);display(WW);
            ok4b=true;
        end
    end
    if ((ok5a==false) || (ok5b==false))
        %axioma 5
        %a: K(Kq v p) -> (Kq v Kp)
        %b: K(dKq v p) -> (dKq v Kp)
        poq1=ones(1,w);
        for i=1:w
            poq1(i)=max(WW(i,p),psi1(i)); %Kq v p in i
        end
        poq2=ones(1,w);
        for i=1:w
            poq2(i)=max(WW(i,p),psi2(i)); %dKq v p in i
        end
        x=ones(1,w);
        for i=1:w
            x(i)=I1(R(s,i),poq1(i),norm);
        end
        kpokq1=min(x);%linkerkant a
        for i=1:w
           x(i)=I1(R(s,i),poq2(i),norm);
        end
        kpokq2=min(x);%linkerkant b
        kp=ken(p,WW,s,R,norm);
        kpoq1=max(kp,psi1(s));%rechterkant a
        kpoq2=max(kp,psi2(s));%rechterkant b
        ax5a=I1(kpokq1,kpoq1,norm);
        ax5b=I1(kpokq2,kpoq2,norm);
        if ax5a<0.999999999
            display(ax5a);display(WW);
            ok5a=true;
        end
        if ax5b<0.999999999
            display(ax5b);display(WW);
```

```
                ok5b=true;
            end
        end
        exp=exp+1;
    end
    if exp==n %we beeindigen de lus na n stappen
        display('failed');
        display(ok3a);display(ok3b);display(ok4a);display(ok4b);
        display(ok5a);display(ok5b);
        ok3a=true;ok3b=true;ok4a=true;ok4b=true;
        ok5a=true;ok5b=true;
    end
end
end
```

A.3 Voorbeeld vaag Kripke model

We voeren de gegevens uit sectie 4.3 in in Matlab en berekenen de gewenste waarheidswaarden.

```
% Voorbeeld in Matlab
%---------------------
% auteur: Sofie De Clercq
function voorbeeld()
% Deel 1: functies definieren
%=============================

%t-norm T1
function[T1]=T1(a,b)
%Lukasiewicz
T1=max(0,a+b-1);
end

%geinduceerde residuele implicator bij T1 nl. I1
function[I1]=I1(a,b)
%lukasiewicz
I1=min(1,1-a+b);
end

%Deel 2: Gegevens invoeren
%==========================
% Toegankelijkheidsrelatie R
R=[[1,0.95,0.95,0.9,0.9,0.85];[0.95,1,0.9,0.95,0.85,0.9];
    [0.95,0.9,1,0.95,0.95,0.9];[0.9,0.95,0.95,1,0.9,0.95];
    [0.9,0.85,0.95,0.9,1,0.95];[0.85,0.9,0.9,0.95,0.95,1]];
display(R);
%nagaan dat R T-transitief is
```

```
for x=1:6
    for y=1:6
        for z=1:6
            if T1(R(x,y),R(y,z)) > (R(x,z)+0.00001)
            display('mislukt R T-transitief');
            end
        end
    end
end

%interpretatie pi (waarheidswaarden per wereld)
%rij=wereld, kolom=atomisch prop
WW1=[[1,0.9,0.5,0.7,0.4];[1,0.9,0.5,0.8,0.4];
    [1,0.9,0.6,0.7,0.4];[1,0.9,0.6,0.8,0.4];
    [1,0.9,0.7,0.7,0.4];[1,0.9,0.7,0.8,0.4];
    [0,0.9,0.5,0.7,0.4];[0,0.9,0.5,0.8,0.4];
    [0,0.9,0.6,0.7,0.4];[0,0.9,0.6,0.8,0.4];
    [0,0.9,0.7,0.7,0.4];[0,0.9,0.7,0.8,0.4]];
display(WW1);

% Deel 3: Calculatie
%====================
%waarheidswaarde van de ziekte in elke wereld
%ziekte = ((0.75 -> p1)&(0.8 -> p2)&(0.6 -> p3)&(0.75 -> p4)&(0.5 -> p5))
for j=1:2
    WW=WW1((6*(j-1)+1):(6*j),1:5);%eerst patient 1, dan patient 2
    ziekte=zeros(1,6);
    for i=1:6
        a=T1(I1(0.6,WW(i,3)),T1(I1(0.75,WW(i,4)),I1(0.5,WW(i,5))));
        ziekte(i)=T1(I1(0.75,WW(i,1)),T1(I1(0.8,WW(i,2)),a));
    end
    display(ziekte);
    %waarheidswaarde van K(ziekte) in elke wereld
    Kziekte=zeros(1,6);
    x=zeros(1,6);
    for k=1:6
        for m=1:6
            x(m)=I1(R(k,m),ziekte(m));
        end
        %display(x);
        Kziekte(k)=min(x);
    end
    display(Kziekte);
end
end
```

Bibliografie

[1] B.F. Chellas. Modal Logic: An Introduction. Cambridge University Press, Cambridge/Londen, 1980.

[2] G. Resconi & G.J. Klir & D. Harmanec & U. St. Clair. Interpretations of various uncertainty theories using models of modal logic: A summary. Fuzzy Sets and Systems, 80(1):7–14, 1996.

[3] G.E. Hughes & M.J. Cresswell. A Companion to Modal Logic. Methuen & Co., Londen, 1984.

[4] M. Fitting. Many-valued modal logics. Fundamenta Informaticae, 15(3-4):235–254, 1991.

[5] F. Esteva & L. Godo. On uncertainty and Kripke modalities in t-norm fuzzy logics, pages 173–192. College Publications, 2009.

[6] L. Godo, editor. Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty, 8th European Conference, Barcelona, Spain, July 6-8, 2005, Proceedings, volume 3571 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2005.

[7] T. Flaminio & L. Godo. A logic for reasoning about the probability of fuzzy events. Fuzzy Sets and Systems, 158(6):625–638, 2007.

[8] J.A. Goguen. The logic of inexact concepts. Synthese, 19:325–373, 1969.

[9] P. Hájek. Basic fuzzy logic and **BL**-algebras I. Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, 2(3):124–128, 1998.

[10] P. Hájek. Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[11] P. Hájek. On fuzzy modal logics $\mathbf{S5}(\mathcal{C})$. Fuzzy Sets and Systems, 161(18):2389–2396, 2010.

[12] J. Y. Halpern. Reasoning about knowledge: A survey. In Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, pages 1–34. Oxford University Press, 1995.

[13] P. Hájek & D. Harmancová. Medical fuzzy expert systems and reasoning about beliefs. Technical Report 632, Institution of Computer Sciencs, Academy of Science of the Czech Republic, 1994.

[14] A.M. Radzikowska & E.E. Kerre. Characterisation of main classes of fuzzy relations using fuzzy modal operators. Fuzzy Sets and Systems, 152(2):223–247, 2005.

[15] B. Van Gasse & C. Cornelis & G. Deschrijver & E. E. Kerre. Triangle algebras: A formal logic approach to interval-valued residuated lattices. Fuzzy Sets and Systems, 159(9):1042–1060, 2008.

[16] E.E. Kerre. Cursus vaagheids- en onzekerheidsmodellen, vakgroep toegepaste wiskunde en computerwetenschappen, universiteit gent, 2009.

[17] S. Kripke. Semantical analysis of modal logic i. normal propositional calculi. Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 9:67–96, 1963.

[18] J.-J.Ch. Meyer. Epistemic logic, chapter 9. Blackwell Publisher Inc. (editor Lou Goble), 2001. preprint 010, 1999.

[19] A. M. Mironov. Fuzzy modal logics. Journal of Mathematical Sciences, 128(6):3461–3483, 2005.

[20] O. Morikawa. An extended gentzen-type formulation of a many-valued modal propositional logic based on zadeh's similarity relation. Fuzzy Sets and Systems, 101(1):115–123, 1999.

[21] M. Nachtegael. Cursus soft computing, vakgroep toegepaste wiskunde en computerwetenschappen, universiteit gent, 2010.

[22] V. Goranko & M. Otto. Model theory of modal logic. In Handbook of Modal Logic, volume 3 of Studies in Logic and Practical Reasoning, pages 249–329. Elsevier, 2007.

[23] D. Dubois & H. Prade. Gradualness, uncertainty and bipolarity: Making sense of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 192:3–24, 2012.

[24] K. Segerberg. An essay in classical modal logic. Uppsala Universitet, Filosofiska Studier, 1971.

[25] N. Suzuki. Kripke frame with graded accessibility and fuzzy possible world semantics. Studia Logica, 59(2):249–269, 1997.

[26] R. Cignoli & F. Esteva & L. Godo & A. Torrens. Basic fuzzy logic is the logic of continuous t-norms and their residua. Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, 4(2):106–112, 2000.

[27] E. Turunen. Mathematics Behind Fuzzy Logic. Physica-Verlag, Wurzburgt, 1999.

[28] J.F.A.K. van Benthem & H.P. van Ditmarsch & J.S. Lodder & J. Ketting & W.P.M. Meyer-Viol. Logica voor informatica. Pearson Education Benelux, 2003.

[29] J.-J.Ch. Meyer & W. van der Hoek. Epistemic Logic for AI and Computer Science. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[30] P. Hájek & D. Harmancová & R. Verbrugge. A qualitative fuzzy possibilistic logic. International Journal of Approximate Reasoning, 12(1):1–19, 1995.

[31] M. Blondeel & S. Schockaert & M. De Cock & D. Vermeir. Fuzzy autoepistemic logic and its relation to fuzzy answer set programming, 2011.

[32] M. Blondeel & S. Schockaert & M. De Cock & D. Vermeir. Fuzzy autoepistemic logic: reflecting about knowledge of truth degrees. In ECSQARU'11, pages 616–627, 2011.

[33] Matthias Vogt. Handboek Filosofie. Rebo Productions, Lisse, 2005.

[34] Z. Zhang & Y. Sui & C. Cao & G. Wu. A formal fuzzy reasoning system and reasoning mechanism based on propositional modal logic. Theoretical Computer Science, 368(1-2):149–160, 2006.

[35] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. Information Control, 8:338–353, 1965.